



Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente. Combinaison linéaire de séries convergentes.

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.

Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.

Convergence et somme de la série exponentielle.

Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Convergence absolue.

Exercice 1 ♥ : Reconnaître les séries usuelles

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n \geq 0} \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n; & b) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}; & c) \sum_{n \geq 1} \sin(n); & d) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!} \\
 e) \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}; & f) \sum_{n \geq 0} -5 (\ln(2))^n; & g) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{4^n}; & h) \sum_{n \geq 1} \ln^2(n) \\
 i) \sum_{n \geq 0} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}; & j) \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 2^n + n^2 3^n}{n!} & &
 \end{array}$$

Remarque : Dans le cas j), on montrera au préalable que $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$.

Exercice 2 ★ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n}; \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}; \quad c) \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right); \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 3 ★ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{3^{n+2}}; & b) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n}; & c) \sum_{n \geq 0} \frac{n \arctan n}{e^n}; \\
 d) \sum_{n \geq 0} \frac{2n-10}{(n+1)^3}; & e) \sum_{n \geq 0} \frac{1+\sin n}{n!}; & f) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+\ln n}
 \end{array}$$

Ex 1 a) $\sum_{n \geq 0} \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ Nature et somme éventuelle.

(i) $q = -\frac{1}{2}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $|q| < 1$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n$ susceptible de converger.

(ii) $\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} q^n$ série géom. convergente
 car $|q| = \frac{1}{2} < 1$.

$$\text{et } \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

(iii) Donc $\sum \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ cv par C.L. de série convergente.

$$\text{Et } \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}$? $u_n = \frac{n}{3^n} = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = n \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

"
 $(S_n)_{n \geq 0}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

1) En général,
 $\sum \lambda u_n \neq \lambda \sum u_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

ou $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ cv [série géométrique dérivée
 avec $|q| = \frac{1}{3} < 1$]

$$\text{et } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - 1/3)^2} = \frac{1}{4/9} = \frac{9}{4}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

c) $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$? $u_n = \sin(n)$ / $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

impl $\sum \sin(n)$ DV

car $\sum u_n$ cv $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

d) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}$ Nature ?

$= (S_n)$ ou $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - 1 + 1$

Requel $\sum \frac{x^k}{k!}$ cv et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

(i) $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ cv car série exponentielle.

(ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right] - \left(\frac{(-1)^0}{0!} \right) - \left(\frac{(-1)^1}{1!} \right)$

$= \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
 $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Soit

$S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} - \underbrace{1 - (-1)}_{-1+1=0} = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n \cdot n!}$; $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(2/3)^n}{n!}$

$= (S_n)_{n \geq 0}$ ou $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^k \cdot k!} = \sum_{k=0}^n \frac{2 \times 2^k}{3^k \cdot k!}$
 $= 2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^k \cdot k!}$ avec $a = \frac{2}{3}$

cars

ou $\sum \frac{2^n}{n!}$ cv avec $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

donc $\sum \frac{(2/3)^n}{n!}$ cv et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2/3)^k}{k!} = e^{2/3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2/3)^k}{k!} = \boxed{2 \cdot e^{2/3}} = S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n \cdot n!}$

Remarque (i) $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n \cdot n!} = \frac{(2/3)^n}{n!} \times 2$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ car $2^n = o(n!)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n} \cdot 2 \times \frac{2^n}{n!} \right) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$\Rightarrow \sum u_n$ suscep. de cv.

g) $\sum -5(\ln(2))^n$; on pose $u_n = -5(\ln(2))^n$
 $= -5q^n$ où $q = \ln(2)$

$1 < 2 < e$
 $\Rightarrow \ln(1) < \ln(2) < \ln(e) : \boxed{0 < \ln(2) < 1}$

Donc $|q| = \ln(2) < 1$

et $\boxed{\sum_x (\ln(2))^n = \sum_x q^n}$ CV car série géométrique avec $|q| < 1$

avec $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(2))^n = \frac{1}{1 - \ln(2)}}$

$\rightarrow$ on pose $\underline{S_n} = \sum_{k=0}^n -5(\ln(2))^k = -5 \cdot \sum_{k=0}^n (\ln(2))^k$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(2))^k = -\frac{5}{1 - \ln(2)}$

Conclusion $\boxed{\sum -5(\ln(2))^n \text{ CV et } \sum_{n=0}^{\infty} -5(\ln(2))^n = -\frac{5}{1 - \ln(2)}}$

g) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{4^n}$? $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{4^n}$ $\hookrightarrow n^2 = n(n-1) + n$

$= (S_n)_{n \geq 0}$ $= [n(n-1) + 2n + 1] \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

avec $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k + 1}{4^k} = \sum_{k=2}^n \underbrace{2k(k-1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=1}^n \underbrace{2k}_{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} q = \frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^n \underbrace{1}_{\left(\frac{1}{4}\right)^k}$

$= \frac{1}{4^2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k$

$S_n = \frac{1}{12} T_n + \frac{1}{2} U_n + V_n$

main (T_n) CV et $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} = \frac{2}{(1 - 1/4)^3} = \frac{2}{(3/4)^3} = 2 \cdot \frac{4^3}{3^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$
 [série geom. dérivée 2nd]

(U_n) CV [série geom. dérivée avec $q = \frac{1}{4} \in]-1, 1[$]
 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1 - 1/4)^2} = \frac{16}{9}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/4}$

$(S_n) \subset \mathbb{V}$ et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{4^2} 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{2 \times 4}{3^3} + \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{8 + 24 + 36}{27} \\ &= \frac{68}{27} \end{aligned}$$

h) $\sum_{n \geq 1} \ln^2(n)$? $u_n = \ln^2(n) \xrightarrow{\infty} +\infty \neq 0$
 $\rightarrow \sum u_n \text{ D.V.}$

$\sum [\ln(n)]^2$
 n'est pas est...
 $\rightarrow$ Pas une série géom..

$\sum_{n \geq 0} q^n$ à q fixé...
 $= \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)_{n \geq 0}$
 $= (1, 1+q, 1+q+q^2, \dots, 1+q+\dots+q^n, \dots)$

Si $|q| < 1$ alors $1+q+\dots+q^n+\dots = \frac{1}{1-q}$
 $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

i) $\sum_{n \geq 0} u_n$ à $u_n = \frac{\lambda^n}{n!} \xrightarrow{\infty} 0$ car $\lambda^n = o(n!)$

(i) $\frac{n}{n!} = \frac{\lambda}{\lambda \cdot (n-1)!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Cste

$\sum u_n$ susceptible de converger.

par croissance comparée...

(ii) $\sum_{n \geq 0} u_n = (S_n)_{n \geq 0}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!}$
 $= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \lambda T_n$
 $= 0$ si $k=0$

Concl 2.

$\sum u_n \subset \mathbb{V}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lambda$

or $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \subset \mathbb{V}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$

Concl $(S_n) \subset \mathbb{V}$ et
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$

$$j) u_n = \frac{n^3 e^n + n^n 3^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n = (S_n)_{n \geq 0}$$

indication $\forall n \quad n^3 = \underbrace{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n}_{\text{on développe...}}$

$$= \underbrace{n(n^2 - 3n + 2)} + \underbrace{3n^2 - 3n} + \underbrace{n}$$

avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{[k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k] 2^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{[k(k-1) + k] 3^k}{k!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)(k-2) 2^k}{k!}}_{=0 \text{ si } k=0,1,2} + 3 \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) 2^k}{k!}}_{=0 \text{ si } k=0,1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k 2^k}{k!}}_{=0 \text{ si } k=0} + \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) 3^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{k 3^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=3}^n \frac{2^{k-3}}{(k-3)!} \cdot 2^3 + 3 \sum_{k=2}^n \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} \cdot 2^2 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 2 + \sum_{k=2}^n \frac{3^{k-2}}{(k-2)!} \cdot 3^2 + \sum_{k=1}^n \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} \cdot 3$$

$i=k-3 \rightarrow 3 \leq k \leq n$

$$= 8 \sum_{i=0}^{n-3} \frac{2^i}{i!} + 3 \cdot 4 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{2^j}{j!} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2^\ell}{\ell!} + 9 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{3^j}{j!} + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{3^\ell}{\ell!}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 8 \cdot e^2 + 12 e^2 + 2 \cdot e^2 + 9 e^3 + 3 e^3$

car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = e$

Concl. (S_n) CV et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 22 e^2 + 12 e^3$

ou encore

$$\sum u_n \text{ CV et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 22 e^2 + 12 e^3$$

Exercice 2

Telles usages A utiliser sur les
Sommes partielles...

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n} ; u_n = \frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \sum u_n$ susceptible de converger.

$$\sum u_n = (S_n)_{n \geq 1} \quad \text{avec } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \quad ((S_n)_{n \geq 1} \text{ converge})$$

Conclusion

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n} \text{ cv} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2}$$

$$u_k = \text{sum}([k \text{ for } i \text{ in range}(1, n+1)]) \\ = \text{sum}([1, 2, \dots, n])$$

↳ Remarque: on a obtenu au début que

$$u_n \sim \frac{2}{n^2}$$

$$\text{et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ cv (série de référence)}$$

$$\text{Donc } \sum u_n \text{ cv} \quad \square$$

$u_n \sim \frac{1}{n^2}$ est
 $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^2}$
ont la même
nature

$$5) \sum_{n \geq 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} ;$$

$$u_n \sim \frac{4}{4n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$u_n = \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\begin{cases} 2n+1 \sim 2n \\ 2n+3 \sim 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+1)(2n+3) \sim 4n^2$$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n$ susceptible de converger.

• Par ailleurs: $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ (série de référence)

Donc $\sum u_n < \infty$

(Car) ESTP / $u_n \sim v_n$
 $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature ...

Valeur de $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$?

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$$

$$= \frac{(2n+3) - (2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1}{2}$$

(!)
 mettre au même dénominateur
 + identification

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = (S_n)_{n \geq 0} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)(2k+3)}$$

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \left[\underbrace{\frac{2}{2k+1}}_{u_k} - \underbrace{\frac{2}{2k+3}}_{u_{k+1}} \right]$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$$

$$u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1} = \frac{2}{2k+3}$$

$$u_k = \frac{2}{2k+1}$$

Telescopage.

$$S_n = u_0 - u_{n+1} = 2 - \frac{2}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \Rightarrow (S_n) < \infty$$

$$\sum u_n < \infty \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2.$$

$$c) \sum_{n \geq 1} \ln \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right]$$

$$u_n = \ln \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right]$$

$$\text{avec } \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$\Rightarrow \sum u_n$ suspect. do converge

$$\sum u_n = (S_n)_{n \geq 1} \text{ avec } S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[\ln[(k+1)^2] - \ln[k(k+2)] \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[2 \ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+2) \right]$$

$$\rightarrow \left[\ln(k+1) + \ln(k+1) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{(\ln(k+1) - \ln(k+2))}_{u_{k+1}} - \underbrace{(\ln(k) - \ln(k+1))}_{u_k} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$$

$$= u_{n+1} - u_1$$

$$u_{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k+2)$$

$$S_n = \underbrace{\ln(n+1)}_{+\infty} - \underbrace{\ln(n+2)}_{+\infty} = \underbrace{(\ln(1) - \ln(2))}_{=0}$$

$$= \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) + \ln(2) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

cond 1 (S_n) CV et $\lim S_n = \ln(2)$

cond 2 $\left| \sum u_n \text{ CV et } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln(2) \right|$

Autre idée $u_n = \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \geq \sqrt{1} - \sqrt{n+1} = \ln(2) - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) = \sqrt{1} - \sqrt{n+1}$$

$$d) \sum u_n \text{ et } u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \xrightarrow{\sin(0)=0} \frac{0}{0} = 0$$

$\sum u_n$ suspect. to converge... ($\cos(0)=1$ pas indigestible!)

$u_n \sim ?$ $\cdot \sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$
 $\sin(x) \sim x$

$\cdot \lim_{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$
 so $\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim 1$

Donc

$u_n \sim \frac{1/n^2}{1 \times 1} = \frac{1}{n^2} = v_n ; \text{ et } \sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$
Donc (2 step) $\sum u_n \text{ cv}$

$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1} - \cos \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k+1}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Donc $S_n = \sum_{k=1}^n \left[\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \tan\left(\frac{1}{k+1}\right) \right]$

$= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$

$S_n = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tan(1) - \tan(0) = \tan(1)$
 $(S_n) \text{ cv et } \lim_{\infty} S_n = \tan(1)$

Concl $\sum_{n \geq 1} u_n \text{ cv et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} = \tan(1)$

Exercice 4 ★ : Savoir utiliser la convergence absolue

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{n + 2^n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{2^n + 4^n}$$

Exercice 5 ★★ : Équivalences et théorème de comparaison

On souhaite faire l'étude de la suite d'Euler définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

① On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que les développements limités usuels permettent d'obtenir que :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

② Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{1}{2} \leq \frac{|v_n|}{1/2n^2} \leq \frac{3}{2}$.

③ En déduire que la série de terme général v_n converge.

④ Montrer que la suite (u_n) converge et en déduire que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 6 ★★ :

Soit $x \in [-1, 1[$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout t de $] -1, 1[$, $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

② En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, x]$, $\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$

③ Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$

④ En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$