



Fonctions - correction Planche 3

Planche 3 : ***

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrons que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

- Si $n = 0$ alors $f_n : x \mapsto x - 1$ et l'équation $f_0(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_0 = 2$.
- Si $n \geq 1$, on étudie la fonction f_n : C'est une fonction polynôme, ce qui assure que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$f'_n(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x - n)$$

Dès lors

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_1 = \frac{n}{n+1} > 0.$$

Il en découle que la fonction f_n est décroissante sur $[0, x_1]$ avec $f_n(0) = 0$.

Donc f_n ne s'annule pas sur $]0, x_1]$.

Il suffit alors de noter que f_n est **continue** sur $[1, 2]$ et que 1 est compris entre $f_n(1) = 0$ et $f_n(2) = 2^n > 1$ pour conclure par application du théorème des valeurs intermédiaires que : $\exists \alpha_n \in [1, 2] / f_n(\alpha_n) = 1$

Par ailleurs la fonction f_n est strictement croissante sur $[1, 2] \subset [x_1, +\infty[$ puisque $x_1 = \frac{n}{n+1} < 1$.

Par application du théorème de la bijection, nous avons donc :

$$\boxed{\exists! \alpha_n \in [1, 2] / f_n(\alpha_n) = 1}$$

② **Modélisation** : On lira page suivante une rédaction possible utilisant l'algorithme de dichotomie et le langage Python. Il suffit de faire varier la valeur de N pour pouvoir conjecturer que la suite (α_n) converge vers 1 par valeurs supérieures.

③ **Étude mathématique** :

a. Déterminons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+2} - x^{n+1} - x^{n+1} + x^n = x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n \\ &= x^n(x^2 - 2x + 1) = x^n(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

En déduire la monotonie de la suite (α_n) :

Si on considère le cas particulier $x = \alpha_n \in [1, 2]$ pour tout n entier naturel, on obtient :

$$f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1 = f_n(\alpha_n)$$

Or la fonction f_n est croissante sur $[1, 2]$. Il découle donc de la relation précédente que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ est décroissante}}.$

b. Prouvons que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l :

La suite (α_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

Conclusion : $\boxed{\exists L \in [1, 2]. \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = L}$

En raisonnant par l'absurde, validons la conjecture faite en 2. pour la limite L de la suite (α_n) :

On suppose pour valider notre conjecture que $L > 1$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(\alpha_n)} = +\infty \text{ car } \ln(L) > 0$$

Dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha_n) = +\infty$$

Ce qui est absurde puisque, par hypothèse, $f_n(\alpha_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : (α_n) converge vers $L = 1$

Fonctions Python permettant d'estimer la monotonie de la suite (u_n) :

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

plt.close('all')

eps = 1e-3

def g(n,x): # g(n,x) = f_n(x) - 1
    return x**(n+1)-x**n-1

def dichotomie(n,eps):
    # détermination de  $\alpha_n$  à eps près avec a,b = 1,2
    a,b = 1,2
    while b-a > eps:
        c = (a+b)/2
        if g(n,a)*g(n,c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c # v.a. de alpha_n

def suiteAlpha(N):
    alpha = [2] # initialisation avec alpha_0 = 2
    for n in range(1,N+1): # termes de alpha_1 à alpha_N
        va = dichotomie(n,eps)
        alpha.append(va)
    return alpha

def graphe(N):
    A = suiteAlpha(N)
    abs = np.arange(N+1)
    plt.plot(abs,A,'ro')
    plt.show()
    return A

A = graphe(200)

plt.show()
```