

Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

Exercices rapides :

① **Ex 1 :** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Donnons l'ensemble de définition de f : La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

Par ailleurs $\frac{\sin(x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrons que f est dérivable en 0, donnons l'équation de sa tangente en ce point et précisons la position de cette tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 :

On rappelle que $\sin(u) \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$. D'où :

$$\sin(x^2) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

soit :

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est $y = x$ et que la position de la courbe dépend du signe de $-\frac{x^5}{6}$.

Conclusion : La tangente en 0 est $\mathcal{C}_f$ est $(T_0) : y = x$. $\mathcal{C}_f$ sous (T_0) en 0^+ , au-dessus en 0^-

② **Ex 2 :** Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$? On écrit : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$.

La continuité de la fonction exp en 1 permet d'obtenir :

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

③ **Ex 3 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

a) Précisons son ensemble de définition :

$$1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0$$

Conclusion : $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup \mathbb{R}_+$

b) Montrons que $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$:

Il suffit de montrer que $\frac{f(-\frac{1}{2} - x) + f(-\frac{1}{2} + x)}{2} = 0 \Leftrightarrow f(-\frac{1}{2} - x) + f(-\frac{1}{2} + x) = 0$

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}-x\right) + f\left(-\frac{1}{2}+x\right) &= f\left(-\frac{1+2x}{2}\right) + f\left(\frac{-1+2x}{2}\right) \\ &= -\frac{1+2x}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{1+2x}} + \frac{-1+2x}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{2x-1}} \\ &= -\frac{1+2x}{2} \sqrt{\frac{2x-1}{1+2x}} + \frac{2x-1}{2} \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{(2x+1)(2x-1)} + \frac{1}{2} \sqrt{(2x+1)(2x-1)} = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

c) Déterminons l'équation de sa (ou ses) asymptote(s) en précisant leur position par rapport à la courbe

On commence par noter que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puis posons $X = \frac{1}{x}$. Alors :

$$Xf\left(\frac{1}{X}\right) = X \frac{1}{X} \sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

D'où

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X + o(X)$$

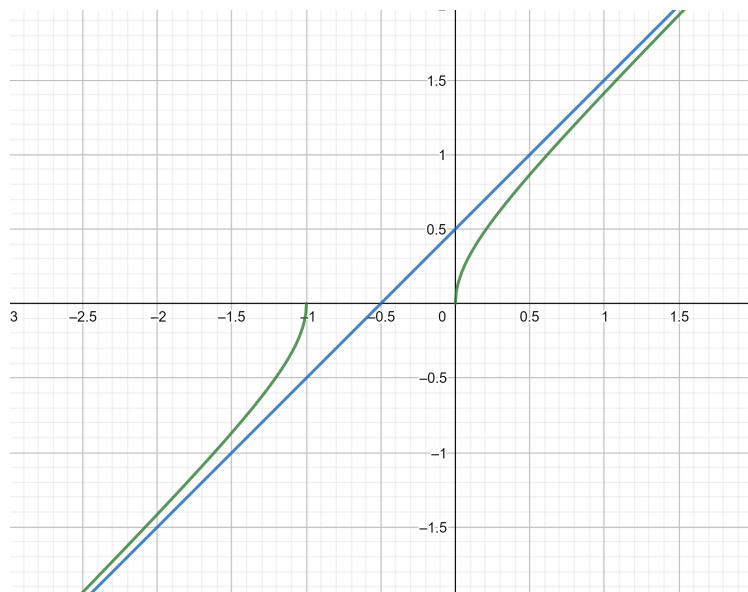
ou encore

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. La position de la courbe

par rapport à ces asymptotes étant donné par le signe de $-\frac{1}{8x}$.

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est sous son asymptote en $+\infty$, au-dessus en $-\infty$.



Problème 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{sh(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Étude des fonctions ch , sh , et f .

- ① a) Étudions la parité des fonctions ch et sh : ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} ch(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x) \\ sh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x) \end{aligned}$$

Conclusion : ch est paire et sh est impaire

- b) Dressons le tableau de variations de la fonction sh pour en déduire le signe de $sh(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$: sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ ($= ch(x)$) donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

En $+\infty$: $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty$ et comme sh est impaire en $-\infty$: $sh(x) \rightarrow -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$	$+$	1	$+$
$sh(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Conclusion : $sh > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $sh < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et nulle en 0

- c) Déterminons un équivalent en $+\infty$ de $sh(x)$: On a en factorisant :

$$\begin{aligned} sh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} (1 - e^{-2x}) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

car $1 - e^{-2x} \rightarrow 1$

On a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{sh(x)}{x} = +\infty$.

- d) Montrons que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) \right[= \mathbb{R}$.

- e) Variations de la fonction ch : ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $ch'(x) = sh(x)$.

En $+\infty$: $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty$ d'où les variations de ch :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$	$-$	0	$+$
$c(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

f) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) > sh(x)$.

on calcule la différence :

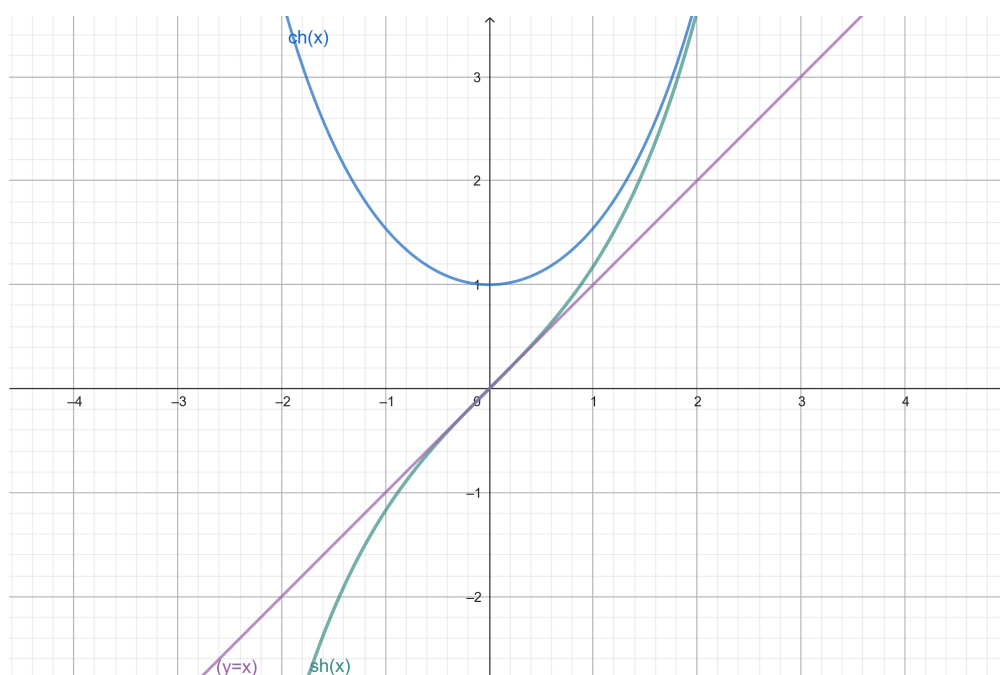
$$\begin{aligned} ch(x) - sh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout réel $x : ch(x) > sh(x)$

g) Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh .

Pour soigner davantage la représentation graphique, on peut aussi donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe de sh , à savoir :

$$y = sh(0) + sh'(0)x = 0 + 1x = x$$



② a) Étudions la parité de la fonction $f : f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = f(x)$$

et $f(-0) = 1 = f(0)$ donc f est paire.

b) Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction sh : On a $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\begin{aligned} sh(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] \\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

qui est le développement limité de sh à l'ordre 3 en 0.

c) Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f :

On a alors quand $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{sh(x)} = \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)} \text{ car } f \text{ est impaire} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.

D'où f est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonction dérivable avec $sh(x) \neq 0$ et pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{sh(x) - xch(x)}{sh(x)^2} = \frac{h(x)}{sh(x)^2}$$

e) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = sh(x) - xch(x)$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= ch(x) - (ch(x) + xsh(x)) \\
 &= -xsh(x)
 \end{aligned}$$

en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{xe^x}{2} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{x} - 1 - e^{-2x} \right) \rightarrow -\infty
 \end{aligned}$$

et comme h est impaire, en $-\infty$: $h(x) \rightarrow +\infty$

d'où le signe de $h(x)$:

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$sh(x)$		$-$	0	$+$	
$-xsh(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow +$	0	$- \searrow$	$-\infty$

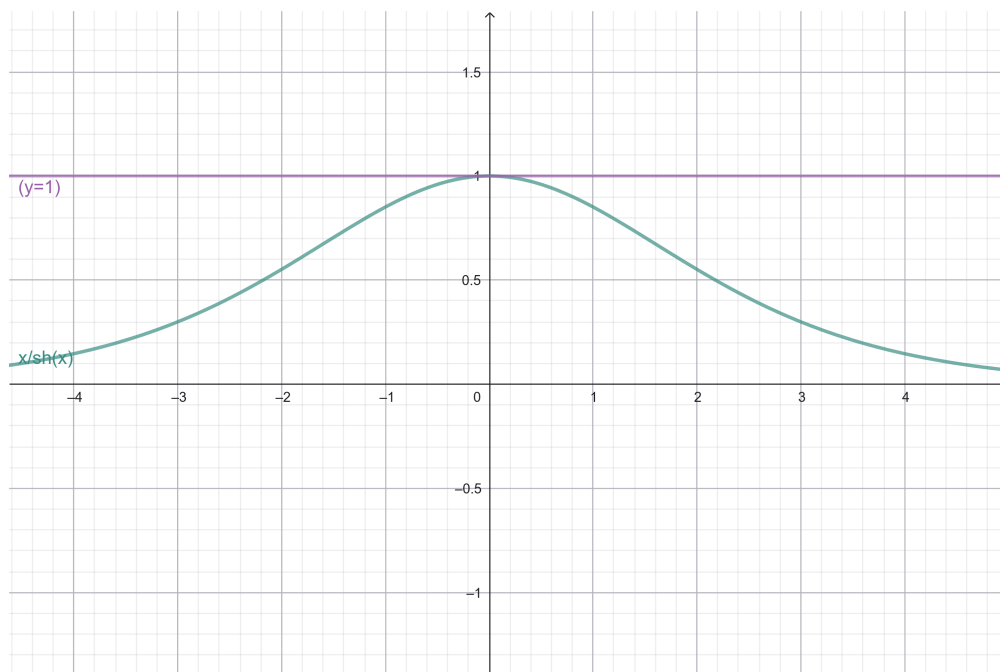
f) D'où finalement le sens de variations de f :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En $+\infty$ on a : $f(x) = \frac{x}{sh(x)} = \frac{2x/e^x \rightarrow 0}{2sh(x)/e^x \rightarrow 1} \rightarrow 0$ en utilisant $sh(x) \sim e^x/2$

On a donc une asymptote horizontale en $+\infty$ et par symétrie en $-\infty$.

On a par ailleurs déjà vu que $\mathcal{C}_f$ admettait la droite d'équation $y = 1$ comme tangente en 0.



2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ① Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ si $0.8 \leq x \leq 1$ alors $1 \geq f(0.8) \geq f(x) \geq f(1) \geq 0.8$ donc $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$,

On a alors par récurrence :

- $u_0 = 1 \in [0.8, 1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0.8, 1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0.8, 1]$
- Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0.8, 1]$

- ② l'équation $f(x) = x$ n'est pas vérifiée pour $x = 0$

Pour $x \neq 0$ on a $f(x) = x \iff \frac{x}{sh(x)} = x \iff sh(x) = 1$

Or sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et comme $1 \in \mathbb{R}$ l'équation $sh(x) = 1$ a une unique solution α .

- ③ Écrivons une fonction Python `dichotomie(f, a0, b0, eps)` qui renvoie une valeur approchée à ε près de l'unique réel α pour lequel la fonction f s'annule sur l'intervalle $I = [a_0, b_0]$:

```

1 from math import *
2
3 def dichotomie(f, eps):
4     a, b = 0.8, 1
5     while b-a > eps:
6         c = (a+b)/2
7         if f(a)*f(c) <= 0:
8             b = c
9         else :
10            a = c
11    return (a+b)/2

```

On utilisera cette fonction en exécutant `f = lambda x:x/sinh(x), g = lambda x:f(x)-x` puis `dichotomie(g, 1e-4)`.

- ④ On donne :

$$\frac{h(1)}{sh^2(1)} \simeq -0.26 \quad \text{et} \quad \frac{h(0.8)}{sh^2(0.8)} \simeq -0.23$$

On a donc $f'(0.8) = -0.23$ et $f'(1) = -0.26$, ce qui assure que $|f'(x)| \leq 0.23 < \frac{1}{3}$ pour tout $x \in]0.8, 1[$.

⑤ On utilise alors l'inégalité des accroissements finis :

Sur $[0.8, 1]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

et pour tout entier $n : u_n$ et $\alpha \in [0.8, 1]$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$ et $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$

d'où par récurrence :

— comme $u_0 = 1$ et $0.8 \leq \alpha \leq 1$ alors $-0.2 \leq 1 - \alpha \leq 0$ donc $|u_0 - 1| \leq 0.2$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

— alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha| \leq 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

— Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq 0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

⑥ Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ on a $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ et par encadrement $u_n - \alpha \rightarrow 0$ et $u_n \xrightarrow{\wedge} \alpha$

⑦ Écrivons une fonction Python `valApprAlpha(eps)` qui renvoie une valeur approchée de α à ε près :

u_n est une valeur approchée de α à ε près dès que :

$$0.2 \left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{0.2} \Leftrightarrow n \ln \left(\frac{1}{3}\right) < \ln \left(\frac{\varepsilon}{0.2}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\frac{\varepsilon}{0.2})}{\ln(\frac{1}{3})}$$

```

1  def valApprRec(eps):
2      u = 1 # u0
3      n = int(log(eps/0.2)/(-log(3)))+1
4      for k in range(1, n+1):
5          u = u/sinh(u)
6      return u

```