

Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

Le devoir se compose de trois exercices et d'un problème.

Un second problème est proposé en page 4 (à la suite de l'Annexe fournie en page 3). Il ne sera abordé que par les 5/2, sous réserve d'avoir traité l'intégralité du sujet précédent.

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice **n'est pas** autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice 1 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- ① Donner l'ensemble de définition de f .
- ② Dire si f est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ et, si c'est le cas, dire si elle est prolongeable par continuité en 0.
- ③ Montrer que f est dérivable en 0, donner l'équation de sa tangente en ce point et préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

Exercice 2 :

Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$?

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

- ① Préciser son ensemble de définition.
- ② Montrer que $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
- ③ Déterminer l'équation de sa (ou ses) asymptote(s) en précisant leur position par rapport à la courbe.

Problème 1 :

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{sh(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Étude des fonctions ch , sh , et f .

- ① a) Étudier la parité des fonctions ch et sh .
 b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh , puis en déduire le signe de $sh(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
 c) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $sh(x)$. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$ (on demande son comportement asymptotique).
 d) Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
 e) Étudier les variations de la fonction ch .
 f) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) > sh(x)$$

- g) Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh .
 ② a) Étudier la parité de la fonction f .
 b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction sh .
 c) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f .
 En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
 d) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
 e) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = sh(x) - xch(x)$$

Étudier les variations de h , puis en déduire le signe de $h(x)$.

- f) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f . (On précisera notamment la tangente en 0 et le comportement asymptotique de f).

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On donne :

$$\begin{aligned} f(0.8) &\simeq 0.9, \quad f(1) \simeq 0.85, \\ sh(0.6) &\simeq 0.64, \quad sh(0.8) \simeq 0.89, \quad sh(1) \simeq 1.18, \quad sh(1.2) \simeq 1.51 \end{aligned}$$

- ① Justifier que $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0.8, 1]$$

- ② Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0.8, 1[$ (on pourra pour l'existence et l'unicité utiliser la question **I/1.d**) sans chercher à déterminer α .
 ③ Écrire une fonction Python `dichotomie(f, a0, b0, eps)` qui renvoie une valeur approchée à ε près de l'unique réel α pour lequel la fonction f s'annule sur l'intervalle $I = [a_0, b_0]$ (le principe est rappelé en Annexe).
 Comment utilisez-vous cette fonction pour renvoyer une valeur approchée à 10^{-3} près de α ?

- ④ On donne :

$$\frac{h(1)}{sh^2(1)} \simeq -0.26 \quad \text{et} \quad \frac{h(0.8)}{sh^2(0.8)} \simeq -0.23$$

Justifier que : $\forall x \in]0.8, 1[, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

- ⑤ En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq 0.2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

- ⑥ En déduire la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.
 ⑦ Écrire une fonction Python `valApprAlpha(eps)` qui renvoie une valeur approchée de α à ε près.

ANNEXE

On rappelle le principe de l'**Algorithme de dichotomie** :

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

Problème 2 :

Dans tout l'exercice on se place sur $\mathbb{R}_+$.

- ① Soit f définie par $f(x) = x^{20} - x - 2$. Justifier qu'il existe un unique γ avec $1 \leq \gamma \leq 2$, tel que $f(\gamma) = 0$
- ② Pour α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, on définit f_n par $f_n(x) = x^n - \alpha x - \beta$.
 - a) Justifier l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
 - b) Que dire de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ lorsque $\alpha + \beta = 1$.
- ③ On se place désormais dans le cas où $\alpha + \beta \neq 1$.
 - a) Établir que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1})$
 - b) Montrer que si $\alpha + \beta < 1$ alors $u_n \in [0, 1[$
 - c) Déterminer un intervalle « symétrique » lorsque $\alpha + \beta > 1$.
 - d) Montrer que (u_n) est monotone puis qu'elle converge. On note l sa limite.
 - e) Écrire une fonction Python d'arguments α , β et m permettant d'afficher les valeurs de (u_n) pour $2 \leq n \leq m$ selon les valeurs de $\alpha + \beta$.

Si tout se passe bien, on obtiendra les affichages proposés dans les figures 1 et 2 :

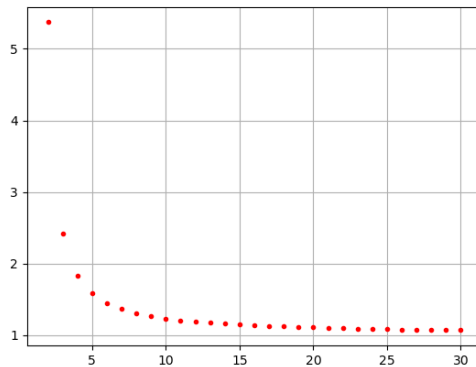


FIGURE 1 – $\alpha = 5$ et $\beta = 2$

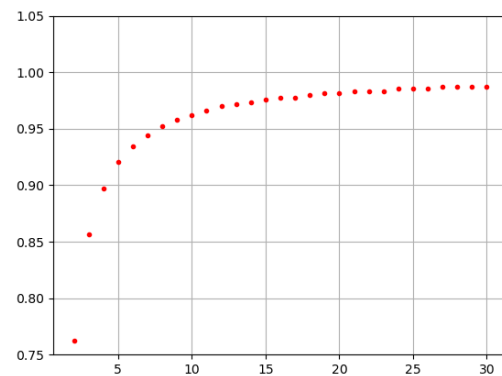


FIGURE 2 – $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.2$

Conjecturer la valeur de l .

- f) On suppose que $l \neq 1$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta < 1. \\ +\infty & \text{si } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

- g) En déduire que $l = 1$.