

Devoir maison : Révisions d'analyse
Planche 3 :

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

- ① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

- ② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$.

Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python ou Geogebra. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

- ③ **Étude mathématique :**

- a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x .
En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
- b) Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l .
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n) .

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

$$— a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$

$$— \text{Pour tout entier naturel } k \text{ on note } c_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

$$\text{si } f(a_k)f(c_k) \leq 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$

$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

Planche 4 :**Rappel. Algorithme de dichotomie**

On considère une fonction g continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.
 si $g(a_k)g(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
 sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α .

Soit $n \geq 2$. On pose $f_n(x) = x^n + x - n$.

- ① Justifier que pour tout $n \geq 2$, $2^n \geq n$ et en déduire qu'il existe un unique $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\varepsilon_n) = 0$ et que $1 \leq \varepsilon_n \leq 2$
- ② On souhaite étudier la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$.
 - a) Montrer que $1 \leq \varepsilon_n \leq n^{1/n}$.
 - b) En déduire que la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite ℓ .
- ③ On fixe pour le reste de l'exercice $n > 1$. On souhaite calculer une valeur approchée de ε_n . À l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction **dichotomie** en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie un réel x tel que $0 \leq x - \varepsilon_n \leq \frac{1}{2n}$.
- ④ On pose $g_n(x) = x - \frac{f_n(x)}{f'_n(x)}$. On définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : x_0 est un réel obtenu par dichotomie tel que $0 \leq x_0 - \varepsilon_n \leq \frac{1}{2n}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = g_n(x_k)$.
 - a) Justifier que g_n est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer la dérivée de g_n en fonction de f_n, f'_n et f''_n et étudier ses variations sur cet intervalle.
 - b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, x_k est bien défini et $\varepsilon_n \leq x_k$.
 - c) En déduire que $(x_k)_{k \geq 0}$ est décroissante puis qu'elle converge vers ε_n .
 - d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [\varepsilon_n, x_k]$ tel que :

$$0 \leq x_{k+1} - \varepsilon_n \leq (n-1) \frac{f_n(c)}{nc^{n-1} + 1} (x_k - \varepsilon_n)$$

- e) Déduire de la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_{k+1} - \varepsilon_n \leq (n-1) (x_k - \varepsilon_n)^2$$

- f) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_k - \varepsilon_n \leq \frac{1}{n2^{2^k}}$.

- ⑤ À l'aide de la suite définie dans cette partie, écrire une fonction **Approx** en Python qui prend en entrée un entier n et un réel strictement positif e et qui renvoie une approximation de ε_n à e près.