



T.D. Fonctions

Remarque

Classement des exercices

Une ★ signale une application directe des formules du cours ;

Les exercices marqués d'un ♥ indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les ** à *** désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.



Les objectifs : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien ($\ln$), fonctions exponentielle $x \mapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+$, fonction logarithme décimal ($\log$), fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) et valeur absolue ($|\cdot|$).

Calculs de dérivées et de primitives en vue d'applications à la physique et aux équations différentielles.

Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{\cdot}$ et $\arctan$). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.

Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.

Développements limités (développements usuels : $\exp$, $\cos$, $\sin$, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$).

Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1 ★ : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\sin x) - \ln x); & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x} + 1}; & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}; & d) \lim_{x \rightarrow 0} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right); & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}; & g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}; & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\ i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{e^{-ax^2} - e^{-a}} (a > 0); & j) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}; & & \\ k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; & l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{x}; & m) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{1/x} - x); & n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1 + \sin x}} - e}{\tan x} \end{array}$$

Exercice 2 ★ : Fonctions usuelles

- ① Résoudre $\begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$
- ② Ensemble de définition, parité et tableau de variation de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 + 2x}$;
Montrer que la droite d'équation $(x = -1)$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$
- ③ Calculer $S = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$
En déduire $T = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 3 ★ : Continuité et dérivabilité des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ; \quad h : x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 ★ : calcul de dérivée

Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. f est plus simplement :

- ① une constante ?
- ② $\tan$?
- ③ la fonction identité ?
- ④ aucune des trois réponses précédentes n'est vraie ?

Exercice 5 ★★ : Dérivées de fonctions réciproques

- ① Montrer que la fonction sinus est une bijection de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. On note A la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle I .
- ② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.
- ③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- ④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- ⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $] -1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
- ⑥ a. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$
b. Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Exercice 6 ♥ : Th. de Rolle et F. des Accroissements finis

- ① Montrer les inégalités suivantes :
 - a. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$
 - b. $\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \leq x$
 - c. $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan} x \leq x$
- ② Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) \leq -3$. Montrer que :

$$\exists ! y \in \mathbb{R} / f(y) = 2y$$

Exercice 7 ★ : Développement limités

Déterminer les développements limités suivants :

- 1) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ à l'ordre 2 en 0 ; 2) $\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 ;
- 3) $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0 ; 4) $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 ; 5) $\operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
- 6) $\frac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0 ; 7) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre n en 0

Exercice 8 ** : Application des développements limités

- ① Soit f , fonction définie sur $[0, \pi/4]$ par : $f(x) = (1 - 2\sin x) \cdot \tan(3x)$.
Déterminer son ensemble de définition et déterminer sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble.
- ② Soit la fonction f définies par : $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$.
Déterminer son ensemble de définition et étudier les branches infinies de f en précisant les positions de la courbe par rapport à ses asymptotes.
- ③ Mêmes questions pour f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$.

Exercice 9 : ** suites récurrentes

Étudier les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1 + u_n} \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} u_0 &\in [1/3, +\infty[\\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n - \frac{2}{9}} \end{cases}$$

Exercice 10 ♥ : F. des Accroissements finis

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$

- ① Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \in [0, 1]$.
- ② Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que : $\frac{e^\lambda}{e^\lambda + 1} = \lambda$. Démontrer que $\lambda \in]0, 1[$.
- ③ Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{4}|u_n - \lambda|$
- ④ Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En donner une valeur approchée grâce à Python.

Pour d'autres exercices, fréquents à l'oral (cf. Planche 3), on retiendra :



suites définies implicitement

Dans certains exercices, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n comme étant l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Très souvent, f est strictement monotone (et continue) sur un intervalle.

Pour étudier la monotonie de $(u_n)_n$, on est amené par exemple à étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ (ou de $f_n(u_{n+1})$).

Si par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante et qu'on trouve par exemple $f_{n+1}(u_n) < 0$, en se souvenant que $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, il vient $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc, par stricte décroissance de f_{n+1} , $u_n > u_{n+1}$. Dans ce cas la suite (u_n) serait décroissante.

ces idées générales sont à adapter à chaque exercice

Se souvenir qu'on joue souvent à la fois sur les monotonies de :

- $n \mapsto f_n(x)$ (x fixé)
- $x \mapsto f_n(x)$ (n fixé)

Planches d'oraux

Planche 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ et la suite récurrente $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1}, x_0 \in]0, 1[$$

- ① Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution c sur l'intervalle $]0, 1/2[$.
- ② Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
- ③ Étudier la convergence de la suite (x_n) et écrire une fonction Python permettant le calcul de x_n pour toute valeur entière de n entrée par l'utilisateur.
- ④ Donner une valeur approchée à ε près de la limite de (x_n) en utilisant l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous :

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

Planche 2 :

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $\forall n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

- ①
 - a. Étudier les variations de f .
 - b. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

- ②
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution. On l'appelle a .
 - b. Montrer que $\frac{1}{e} < a < 1$.
 - c. Écrire une fonction donnant une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
(La méthode de dichotomie est rappelée Planche 1.)

- ③
 - a. Montrer que $a < u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1 < a$.
 - b. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Peuvent-elles converger vers une même limite ?
Qu'en déduit-on concernant la convergence de (u_n) ?

- ④ On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
 - a. Expliciter $h(x)$ pour $x > 0$. Montrer que h est continue en 0.
 - b. Résoudre $h(x) = x$.
 - c. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est convergente et préciser sa limite.
 - d. Montrer que la suite (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.

Planche 3 :

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

- ① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

- ② **Modélisation** : A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$.

Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python ou Geogebra. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

- ③ **Étude mathématique** :

- a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x .
En déduire la monotonie de la suite (α_n) .
- b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l .
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n) .

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

Planche 4 :

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction g continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.
si $g(a_k)g(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α .

Soit $n \geq 2$. On pose $f_n(x) = x^n + x - n$.

- ① Justifier que pour tout $n \geq 2$, $2^n \geq n$ et en déduire qu'il existe un unique $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(\varepsilon_n) = 0$ et que $1 \leq \varepsilon_n \leq 2$
- ② On souhaite étudier la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$.
 - a. Montrer que $1 \leq \varepsilon_n \leq n^{1/n}$.
 - b. En déduire que la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite ℓ .
- ③ On fixe pour le reste de l'exercice $n > 1$. On souhaite calculer une valeur approchée de ε_n . À l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction **dichotomie** en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie un réel x tel que $0 \leq x - \varepsilon_n \leq \frac{1}{2^n}$.
- ④ On pose $g_n(x) = x - \frac{f_n(x)}{f'_n(x)}$. On définit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : x_0 est un réel obtenu par dichotomie tel que $0 \leq x_0 - \varepsilon_n \leq \frac{1}{2^n}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = g_n(x_k)$.
 - a. Justifier que g_n est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer la dérivée de g_n en fonction de f_n, f'_n et f''_n et étudier ses variations sur cet intervalle.
 - b. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, x_k est bien défini et $\varepsilon_n \leq x_k$.
 - c. En déduire que $(x_k)_{k \geq 0}$ est décroissante puis qu'elle converge vers ε_n .
 - d. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [\varepsilon_n, x_k]$ tel que :

$$0 \leq x_{k+1} - \varepsilon_n \leq (n-1) \frac{f_n(c)}{nc^{n-1} + 1} (x_k - \varepsilon_n)$$

- e. Déduire de la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq x_{k+1} - \varepsilon_n \leq (n-1) (x_k - \varepsilon_n)^2$$

- f. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_k - \varepsilon_n \leq \frac{1}{n2^{2^k}}$.

- ⑤ À l'aide de la suite définie dans cette partie, écrire une fonction **Approx** en Python qui prend en entrée un entier n et un réel strictement positif e et qui renvoie une approximation de ε_n à e près.