



T.D.2 Fonctions

Exercice 5 ** : Dérivées de fonctions réciproques

- ① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$. On note A la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle I .
- ② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.
- ③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- ④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- ⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $] -1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
- ⑥
 - a. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$
 - b. Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Correction :

Partie I.

- ① La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De plus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc :

sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

La réciproque de cette fonction sera notée A .

Remarque : d'habitude on l'appelle arcsinus, ou encore Arcsin.

- ② On sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $A(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

On sait que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

Remarque : pour cette question le tracé d'un cercle trigonométrique au brouillon peut aider.

- ③ On trace tout d'abord $\mathcal{C}_1$, la courbe de $\sin$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis on sait que la courbe de A est le symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à la première bissectrice, c'est à dire par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
On fait apparaître les points remarquables vus dans les questions 1 et 2.

...

- ④ Soit x dans $[-1, 1]$. On sait que : $\cos^2(A(x)) + \sin^2(A(x)) = 1$.

Et par définition $\sin(A(x)) = x$. Donc $\cos^2(A(x)) = 1 - x^2$.

Ainsi $|\cos(A(x))| = \sqrt{1-x^2}$.

Enfin, $A(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

- ⑤ La fonction $f = \sin$ est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \cos(x)$, donc f' ne s'annule pas sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (bien noter les bornes exclues). Ainsi

$$A = f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[.$$

Toujours d'après le cours d'analyse de sup, $A' = \frac{1}{f' \circ A}$, donc :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad A'(t) = \frac{1}{\cos(A(t))} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

La dernière égalité est obtenue grâce à la question 4.

Remarque : lorsque t se rapproche des bornes -1 et 1 , $A'(t)$ tend vers $+\infty$, ce qui est une nouvelle justification des demi-tangentes verticales sur la courbe de A qui avaient été obtenues par symétrie avec les tangentes horizontales de $\sin$. Mais bien sûr l'objet du sujet n'était pas ici de s'attarder sur ces détails.

- ⑥ a. D'après le cours sur les développements limités, on a au voisinage de 0 : $(1+t)^a = 1 + at + o(t)$.

En l'appliquant avec $a = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{t}{2} + o(t)$.

- b. Et ainsi, lorsque $x \rightarrow 0$: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On peut primitiver le développement limité : $A(x) = A(0) + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Or $A(0) = 0$, car $\sin(0) = 0$ et $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\text{Au voisinage de } 0 : A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Remarque : ici encore ce développement limité s'accorde bien avec la courbe de A tracée précédemment : en 0 , cette courbe de A a une tangente d'équation $y = x$ et la courbe de A est au-dessus de cette tangente à droite de 0 , et en dessous à gauche de 0 (car $A(x) - x$ est du signe de x^3).