

Planche 2

Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

① a) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ comme quotient de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

d'où $\forall x > 0$, $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

b) D'après ce qui précède,

$$f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$$

or $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $u_1 = f(u_0) \in \mathbb{R}_+^*$.

on montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$
 [$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in \mathbb{R}_+^*$...]

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ a) } f(x) &\geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{-x} - x^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq x^2 \text{ puisque } x > 0 \\ &\Leftrightarrow -x \geq \ln(x^2) = 2\ln(x) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(x) + x \leq 0 \end{aligned}$$

Soit $g(x) = 2\ln(x) + x$, $g'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0 \forall x > 0$
 g est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.
 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

or g continue sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement croissante
 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists ! a \in \mathbb{R}_+^* / g(a) = a$.

conclusion $\exists ! a \in \mathbb{R}_+^* / f(a) = a$

On peut même ajouter que $f(x) > x \forall x \in]0, a[$
et $f(x) < x \forall x \in]a, +\infty[$.

b) $g(1/e) = 2\ln(1/e) + 1/e = -2 + \frac{1}{e} = \frac{1-e}{e} < 0$
 $g(1) = 2\ln(1) + 1 = 1 > 0$

conclusion $\frac{1}{e} < a < 1$

c) Soit ici $g_2(x) = f(x) - x = e^{-x}/x - x$
D'après a) et b), g_2 est décroissante, positive sur $]0, a[$, négative sur $]a, +\infty[$.

On écrit :

$$g_2 = \text{lambda } x: \text{np.exp}(-x)/x - x$$

def dichotomie():

$$a, b = 1/\text{np.e}, 1$$

while np.abs(b-a) > 1e-3:

$$c = (a+b)/2$$

if $g(c) > 0$:

$$a = c$$

else:

$$b = c$$

return $(a+b)/2$

Cette fonction retourne

$$a = 0.703 \approx 10^{-3} \text{ près}$$

③ a) On rappelle que $a < u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = e^{-1} < a$

Notons qu'il suffit de montrer que $a < u_0 < u_2$
car nous savons que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc

$$f(a) = a > f(u_0) > f(u_1)$$

$$\text{soit encore: } \underline{u_2 < u_1 < a.}$$

Comme $a < u_0$, il suffit de montrer que $u_0 = 1 < u_2$

$$u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-u_1}}{u_1} = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e e^{-1/e} = e^{1-1/e}$$

$$\text{or } 2 < e < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{e} < \frac{2}{3}$$

Donc $0 < 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow e^0 < e^{1-1/e}$ car exp est croissante.

Soit $1 = u_0 < u_2$ et donc
et par conséquent

$$\begin{matrix} a < u_0 < u_2 \\ u_3 < u_1 < a \end{matrix}$$

b) on utilise ici que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
et on raisonne par récurrence :

(i) initialisation : $a < u_0 < u_2$

(ii) on suppose que $u_n < u_{n+2}$ pour n fixé ($n \geq 0$)

(iii) on compare par $f \circ f$ qui est croissante
 $f \circ f(u_n) < f \circ f(u_{n+2}) \Leftrightarrow u_{n+2} < u_{n+4}$

(iv) conclusion $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante

un raisonnement identique permet de montrer que

$(u_{n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante

Si (u_n) et (u_{n+1}) convergent, l'une vers l et
l'autre vers l' , alors $l' < a < l$

conclusion : Elles ne peuvent pas converger vers la
même limite ...

Et par conséquent, (u_n) diverge car si (u_n) cv
alors toute suite extraite converge vers la même limite.

④ a) $\forall n \geq 0, h(n) = f[f(n)] = \frac{e^{-2/n}}{e^{-n/n}} = 2e^n e^{-2/n}$

Soit
$$h(n) = n e^{\frac{2^n - e^{-n}}{n}}$$

h est continue sur $]0, +\infty[$ par composition de
fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

Il n'agit donc de montrer que h est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^1 - e^{-x} = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^1 - e^{-x}}{x} = -\infty$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x^1 - e^{-x}}{x}} = 0$

Soit $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 = h(0)$

Conclusion h est continue en 0

b) $h(x) = x \Leftrightarrow x e^{\frac{x^1 - e^{-x}}{x}} = x \Leftrightarrow x [e^{\frac{x^1 - e^{-x}}{x}} - 1] = 0.$

Dès lors,

$$h(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{\frac{x^1 - e^{-x}}{x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{x^1 - e^{-x}}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - \frac{e^{-x}}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } f(x) = x$$

or, en ② a) on a vu que l'unique solution de $f(x) = x$ est $x = a$

Conclusion $h(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = a$

c) la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0

En effet $\forall x > 0, h(x) = x e^{\frac{x^1 - e^{-x}}{x}} > 0$

or $u_1 = \frac{1}{e} > 0$; on suppose $u_{n+1} > 0$ (n fixé) $n \geq 0.$

Dès lors, $u_{n+3} = f[f(u_{n+1})] = h(u_{n+1}) > 0$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > 0.$

Conclusion la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ converge

soit $l' = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$.

Alors $l' = h(l') \Leftrightarrow l' = 0$ ou $l' = a$ car h est continue sur $\mathbb{R}_+$

or $u_3 < u_1 = \frac{1}{e}$ donc $l' < \frac{1}{e} < a$

Conclusion $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = l' = 0$

2) la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

On montre qu'elle diverge en raisonnant par l'absurde.

Soit $l \in \mathbb{R}_+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

alors $l > u_0 = 1$ avec $h(l) = l \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = a$

mais $\frac{1}{e} < a < 1$ d'après ①b).

Donc $l > 1$ est absurde.

Conclusion la suite (u_n) diverge.