

Révisions sur les suites numériques (1h30)

Exercice 1 : Sommes usuelles

On attendait : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$

dem :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p+1)!(k-p-1)!} = \frac{k!(p+1) + k!(k-p)}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{k! + k!k}{(p+1)!(k-p)!} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k-p)!} = \binom{k+1}{p+1}.$$

Application : Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, $\forall 0 \leq p \leq n$

On écrira :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^n \binom{k}{p} \\ &= 1 + \sum_{k=p+1}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \text{ d'après la formule de Pascal} \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \text{ car } \binom{p+1}{p+1} = 1 \text{ et télescopages} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Suites numériques :

- ① Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.

On reconnaît une suite récurrente arithmético-géométrique.

On cherche un point fixe c qui vérifie l'équation $c = 5c - 4 \Leftrightarrow c = 1$.

Par soustraction des deux égalités, on obtient :

$$u_{n+1} - c = 5(u_n - c), \forall n \geq 0$$

la suite $(u_n - c)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 5. Dès lors,

$$\forall n \geq 0, u_n - c = 5^n(u_0 - c) \Leftrightarrow u_n = 5^n(u_0 - 1) + 1$$

Sachant que $u_0 = 2$, on obtient : $\boxed{u_n = 5^n + 1}$

Il est immédiat que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. $\boxed{(u_n) \text{ diverge}}$

Si $u_0 = 0$, alors $u_n = 5^n(1 - 1) + 1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite constante égale à 1 (elle converge)}}$

- ② Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = e^3$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 0 : u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ (*)

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = \ln(u_n)$.

On commence par vérifier que la suite (v_n) est bien définie en montrant que tous les u_n sont strictement positifs.

C'est une démonstration par récurrence sur deux rangs :

- initialisation : $u_0 = e^3 > 0$, $u_1 = 1 > 0$.
- On suppose que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ pour un n entier naturel fixé ($n \geq 0$).
- Alors (hérédité) : $u_{n+1}u_n > 0$ et donc u_{n+2} existe et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} > 0$.
- Conclusion : Tous les u_n sont strictement positifs.

On peut donc composer l'égalité (*) par la fonction $\ln$ et poser $v_n = \ln(u_n)$. Ce qui donne :

$$v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) = \ln((u_{n+1}u_n)^{1/2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n))$$

ou encore :

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$$

On reconnaît effectivement une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 = (r-1)\left(r + \frac{1}{2}\right) \text{ puisque } r_1 = 1 \text{ est une racine évidente...}$$

Dès lors :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / v_n = \lambda 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On obtient λ et μ en utilisant les conditions à l'origine :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = v_0 = \ln(e^3) = 3 \\ \lambda - \frac{\mu}{2} = v_1 = \ln(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \\ \frac{\mu}{2} + \mu = \frac{3}{2}\mu = 3 \end{cases} = \frac{\mu}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = 2$$

$$\text{D'où : } v_n = \ln(u_n) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\textbf{Conclusion : } \boxed{u_n = e^{v_n} = e^{1+2(-\frac{1}{2})^n}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

③ Définition de la limite : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. La définition est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, |u_n - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$$

Exercice 3 :

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$

① Montrons que pour tout n entier naturel : $u_n > 0$ et $v_n > 0$: On raisonne par récurrence...

— Par hypothèse, $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$.

— On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour un entier naturel n fixé.

— Alors, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ car u_n et v_n sont strictement positifs.

$$\text{Par ailleurs, } \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{u_n v_n} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$$

— **Conclusion :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0}$

② Posons $w_n = u_n \cdot v_n$ et montrons que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante :

$$w_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \cdot \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = w_n$$

Conclusion : $\boxed{(w_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite constante égale à } w_0 = u_0 v_0 = 2}$

③ Calculons $v_{n+1} - u_{n+1}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

puisque, d'après la question 1., u_n et v_n sont strictement positifs pour tout entier n .

Conclusion : $\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow v_n - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

④ Montrons que (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, de monotonie opposée : Plusieurs méthodes sont possibles mais la méthode la plus rapide consiste à dire que :

$$\text{— Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} = -\frac{1}{2}(v_n - u_n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ d'après 3.}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

— Pour tout entier n : $u_n v_n = 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{v_n}$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{v_{n+1}} \frac{v_n}{2} = \frac{v_n}{v_{n+1}} > 1$ (puisque (v_n) décroît et ses termes sont positifs...

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, de monotonie opposée

⑤ *Montrons que (u_n) et (v_n) convergent et déterminons leur limite :* Attention car nous ne savons pas que (u_n) et (v_n) sont adjacentes ! En effet il nous manque la preuve que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$...

Mais si on fait la synthèse des questions précédentes, on obtient que :

$$1 = u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots < v_n < \dots < v_2 < v_1 = 2$$

Dès lors :

— La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 : Elle converge vers une limite L .

— La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1 : Elle converge vers une limite L' .

Par ailleurs : $u_n v_n = 2$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par passage à la limite :

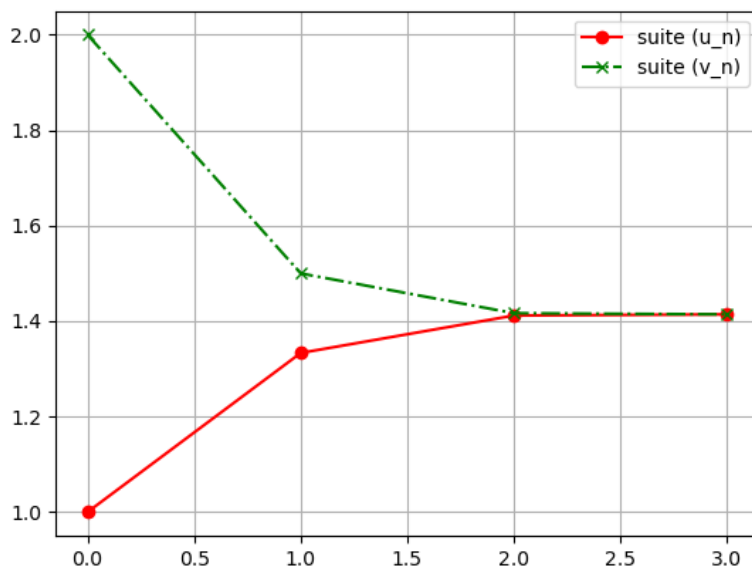
$$\begin{cases} LL' = 2 \\ L' = \frac{L + L'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LL' = 2 \\ 2L' = L + L' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LL' = 2 \\ L' = L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L^2 = 2 \\ L' = L \end{cases} \Leftrightarrow L = \sqrt{2} = L'$$

Conclusion : (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $L = \sqrt{2}$

⑥ *Écrivons une fonction Python d'argument un entier n qui renvoie sous forme de listes les n premiers termes de chacune des deux suites et montrons comment tracer une représentation graphique :*

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 def SuitesUV(n):
4     LU, LV = [1], [2]
5     for k in range(1, n):
6         u_suiv = 2*LU[-1]*LV[-1]/(LU[-1]+LV[-1])
7         v_suiv = (LU[-1]+LV[-1])/2
8         LU.append(u_suiv)
9         LV.append(v_suiv)
10    return LU, LV
11
12 n = 4
13 I = [k for k in range(n)] # k varie entre 0 et (n-1)
14 LU, LV = SuitesUV(n)
15 plt.plot(I, LU, 'ro-', label = "suiteu(u_n)")
16 plt.plot(I, LV, 'gx-.', label = "suitev(v_n)")
17 plt.legend(loc='best')
18 plt.grid()
19 plt.show()
```

La représentation graphique obtenue est la suivante :



Problème :

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

① Montrons que : $\forall k > 1, \quad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$:

— Rédaction 1 : On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[k-1, k]$. Les hypothèses sont vérifiées car $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[k-1, k]$ puisque $k \geq 2$. Donc,

$$\exists c \in]k-1, k[\text{ tel que } \ln(k) - \ln(k-1) = \frac{1}{c}(k - (k-1)) = \frac{1}{c}$$

Or

$$0 < k-1 < c < k \text{ donc } \frac{1}{c} > \frac{1}{k}$$

Conclusion : $\ln(k) - \ln(k-1) > \frac{1}{k}$

— Rédaction 2 : Soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1, k]$, on a : $0 < k-1 \leq t \leq k$ donc $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$ et en intégrant, comme les bornes $k-1 \leq k$, alors on a : $\int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$. Ce qui donne la conclusion...

② $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n) - \ln(1)$ (télescopage).

Conclusion : $v_n \leq 1 + \ln(n)$

Partie 2

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

- ① a) Par récurrence on montre que u_n est définie tout en regardant son signe :
- Pour $n = 0$ est-ce que u_0 est défini et strictement positif? Oui car $u_0 = 1$
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n défini et strictement positif.
Alors $u_n + \frac{1}{u_n}$ est bien défini car $u_n \neq 0$ et est strictement positif.
 - Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

b) On a donc pour tout entier $n : u_{n+1} > u_n$ car $1/u_n > 0$, et la suite u est donc croissante.

- ② a) Pour tout entier k , $u_{k+1}^2 - u_k^2 = (u_{k+1} - u_k)(u_{k+1} + u_k)$.

$$\textbf{Conclusion : } u_{k+1}^2 - u_k^2 = \frac{1}{u_k} \left(2u_k + \frac{1}{u_k} \right) = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

- b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$:

i. Rédaction 1 : Par télescopage... On écrit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - 1^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \text{ (d'après 2.a)...}$$

$$\textbf{Conclusion : } u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

ii. Rédaction 2 : Par récurrence :

— Est-ce que, pour $n = 1$, $u_1^2 = 2 \cdot 1 + 1 + \sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k^2}$?

Or $\sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2} = 1$ et $u_1^2 = 2^2 = 4$ donc oui!

— Soit $n \geq 1$ tel que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

Est-ce que $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$?

Or $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2 + \frac{1}{u_n^2} = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$

— Donc la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$

- c) On utilise la relation précédente et le fait que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$

Par théorème de comparaison, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 1 = +\infty$, on a également $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^2 = +\infty$.

$$\textbf{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

- ③ a) On commence par dire que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

Et

$$u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k \Rightarrow \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k + 1} \leq \frac{1}{2k}$$

Dès lors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}$$

Il suffit de factoriser dans la deuxième somme pour avoir $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

D'où, en utilisant la partie précédente :

$$u_n^2 = (2n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq (2n+1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{Conclusion : } u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

b) En utilisant la partie 1., nous avons :

$$v_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1 \Rightarrow u_n^2 \leq (2n+2) + \frac{1}{2}\ln(n-1) + \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

c) Nous faisons la synthèse des résultats obtenus :

$$2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

En divisant par $2n$ de chaque côté de l'inégalité, on obtient :

$$1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}$$

Par encadrement des limites, nous obtenons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{2n} = 1$.

$$\text{Conclusion : } u_n^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \text{ ou encore } u_n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$$

Partie 3

① La fonction cherchée est la suivante :

```
1 def suiteU(n):
2     LU = [1]
3     for k in range(1, n):
4         LU.append(LU[-1]+1/LU[-1])
5     return LU
```

Quant à la fonction `graphe(n)` permettant d'obtenir la représentation graphique proposée (légende, couleurs et style de ligne y-compris), ça peut être :

```
1 def graphe(n):
2     I = [k for k in range(n)]
3     U = suiteU(n)
4     plt.plot(I, U, 'ro-.', label='suite (u_n)')
5     plt.legend(loc='best')
6     plt.xticks(I)
7     plt.grid()
8     plt.show()
```

② a) Pour une deuxième fonction qui renvoie le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$, on pensera à une structure « Tant que ».

```
1 def depasseCent():
2     u = 1
3     k = 0
4     while u < 100:
5         u = u+1/u
6         k = k+1
7     return k
```

☞ Cette fonction renvoie 4998...

b) On donne $\ln 2 < 0,70$ et $\ln 5 < 1,61$.

On a $5000 = 5 \cdot (5 \cdot 2)^3 = 5^4 2^3$ donc $\ln(5000) = 4 \ln(5) + 3 \ln(2) < 4 \cdot 1,61 + 3 \cdot 0,70 = 8,54$

Conclusion : $\ln 5000 < 8,54$

c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.

Pour que n soit le plus petit entier vérifiant $u_n \geq 100$, il faut et suffit que $u_n \geq 100$ et $u_{n-1} < 100$

Or on a vu que $2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$

— Pour $n = 4994$ on a $\ln(n-1) < \ln(5000)$ donc $2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2} \leq 9988 + 2,5 + \frac{8,54}{2} < 10000$ donc $(u_{4994})^2 < 10000$ et $u_{4994} < 100$

Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994

— Pour $n = 5000$ on a $2n + 1 = 10001 > 10000$ donc $u_{5000}^2 > 10000$ et $u_{5000} > 100$

Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

Conclusion : n est compris entre 4995 et 5000