

Révisions sur les suites numériques (1h30)

Le devoir se compose de questions de cours sur les suites numériques, d'un exercice et d'un problème. A titre indicatif, on consacrerait respectivement 40 mn aux exercices et 40mn au problème (il devrait rester 10 mn pour se relire...).

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice **n'est pas** autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice 1 : Somme usuelle

Soit $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \geq p + 1$. Rappeler et démontrer la formule de Pascal : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \dots$

Application : Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, $\forall 0 \leq p \leq n$

Exercice 2 : Suites numériques :

- ① Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.
Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
Dire si (u_n) converge ou diverge et donner sa limite en cas de convergence.

On suppose maintenant que $u_0 = 1$. Qu'est-ce que cela change pour le comportement de la suite (u_n) ?

- ② Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = e^3$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 0 : u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$
On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est bien définie puis que c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera les deux premiers termes.
En déduire l'expression de v_n puis de u_n pour tout entier naturel.

- ③ Définition de la limite : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. Compléter la proposition suivante : $\forall \varepsilon > 0, \dots$

Exercice 3 :

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$

- ① Montrer que pour tout n entier naturel : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
- ② On pose $w_n = u_n \cdot v_n$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante égale à un réel c qu'on déterminera.
- ③ Calculer $v_{n+1} - u_{n+1}$ et en déduire que $v_n - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- ④ Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, de monotonie opposée.
- ⑤ Conclure que (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leur limite.
- ⑥ Écrire une fonction Python d'argument un entier n qui renvoie sous forme de listes les n premiers termes de chacune des deux suites et donner le moyen d'en tracer une représentation graphique.

Problème :

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- ① Montrer que : $\forall k > 1, \quad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$
 ② En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

- ① a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
 b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
 ② a) Pour tout entier k , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
 c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite u .
 ③ a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

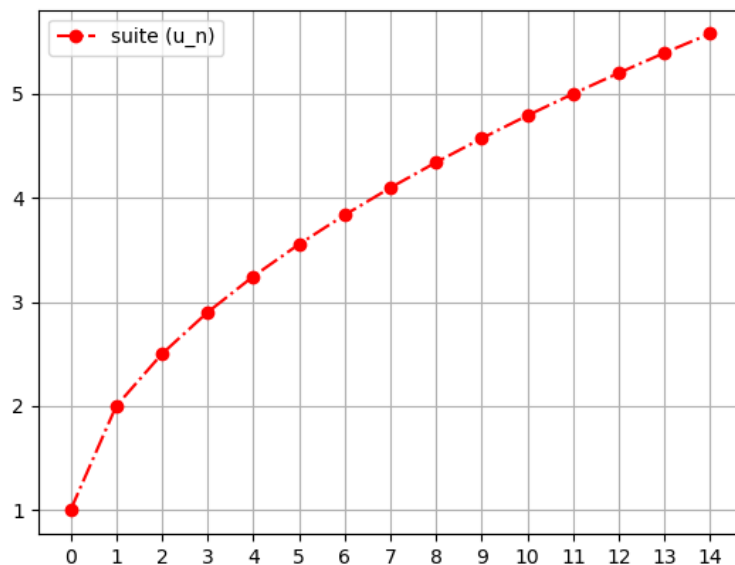
- b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

- c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie 3

- ① Écrire une fonction Python `suiteU(n)` d'argument un entier n qui renvoie sous forme de liste les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
 Écrire une fonction `graphe(n)` permettant d'obtenir **exactement** la représentation graphique suivante (légende, couleurs et style de ligne y-compris) :



- ② a) Écrire une deuxième fonction, toujours en Python, qui renvoie le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.
 b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$. En déduire un majorant de $\ln(5000)$.
 c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.