

Exercice 90 $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 / n \leq m$.

① a)

```
def X(n, m):
    max = 0
    L = [k for k in range(1, m+1)]
    for i in range(n):
        ind = rnd.choice(L)
        L.remove(ind)
        if max < ind:
            max = ind
    return max
```

b) On modélise un échantillon de la variable aléatoire X_n , l'espérance de cet échantillon est un estimateur de $E(X_n)$

Pour ailleurs, si $\bar{X}_N = \frac{X_1^N + \dots + X_N^N}{N}$, alors la LFCN assure que:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_N - E(X_n)| \geq \varepsilon) = 0.$$

```
def valAptEspX(n, m, N=10000):
    S = 0
    for k in range(N):
        S += X(n, m)
    return S/m
```

l'appel de cette fonction avec $n=3$ et $m=15$ renvoie 11.97

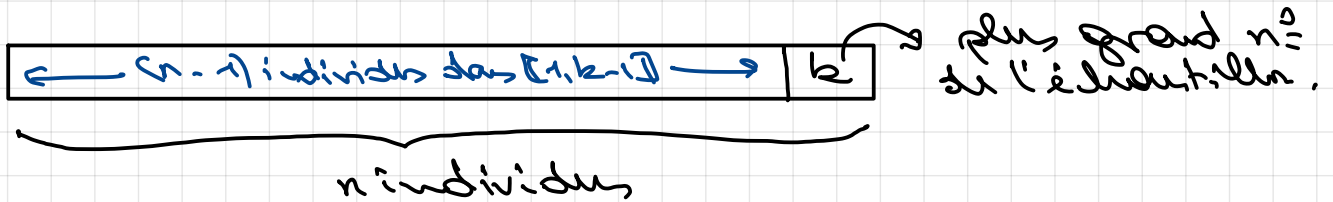
② Si $n=m$, l'ensemble de la population est préservée et donc:

X_n VAR certaine égale à m

③ a) $\text{Card}(\Omega) = \binom{m}{n}$ [tirage d'une partie de n individus pris parmi n].

↳ tirages étant équiprobables, on a:

$$P(X_n = k) = \frac{\text{Card}(X_n = k)}{\text{Card}(\Omega)}$$



$\text{card}(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1}$ car l'individu numéroté k ayant été tiré et étant le plus grand numéro de l'échantillon, il y a autant de tirages favorables que de parties de $(n-1)$ individus pris dans l'ensemble des numéros $\{1, k-1\}$.

Conclusion $\forall k \in [n, m], P(X_n = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{m}{n}}$

or $X_n(\Omega) = [n, m]$ donc $\sum_{k=n}^m P(X_n = k) = 1$.

Conclusion $\sum_{k=n}^m \binom{k-1}{n-1} = \binom{m}{n}$

b) C'est immédiat:

$$\frac{n}{k} \binom{k}{n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{k}} \frac{k!}{(n-k)! \cancel{n}!} = \frac{k-1!}{(n-1)! (n-k)!} = \binom{k-1}{n-1}$$

c) par définition: $E(X_n) = \sum_{k=n}^m k P(X_n = k)$.
Soit

$$E(X_n) = \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{k=n}^m k \binom{k-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{m}{n}} \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}$$

or $\sum_{k=n}^m \binom{k-1}{n-1} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n}$
[d'après (1) a)].

d'où $\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$

[Rq: on peut toujours mieux le justifier en écrivant:

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=(n+1)-1}^m \binom{k}{n+1-1} = \sum_{i=n+1}^{m+1} \binom{i-1}{n+1-1} = \binom{m+1}{n+1} \text{ d'après (1) a)...}$$

Quoi qu'il en soit ...

$$E(X_n) = \frac{n}{\binom{m}{n}} \cdot \binom{m+1}{n+1} = \frac{n}{\binom{m}{n}} \cdot \frac{m+1}{n+1} \binom{m}{n} = \frac{n(m+1)}{n+1}$$

Conclusion $E(X_n) = \frac{n}{n+1} (m+1)$

↙ Pour $n=3$, $m=15$, on obtient $E(X_n) = \frac{3}{4} \times 16 = 12$
ce qui est conforme à la réponse donnée à la question (1).

d) $X_n(\omega) = [1, m]$ donc $E(X_n)$ sous-estime m ...

Rq: $E(X_n) - m = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{n+1} = \frac{n-m}{n+1} < 0 \dots$

(4) $\forall k \geq 0$, on pose $f_n(k) = \frac{n+1}{n} \cdot k - 1$

on a $Y_n = f_n(X_n) = \frac{n+1}{n} \cdot X_n - 1$.

Par linéarité de l'espérance:

$$E(Y_n) = \frac{n+1}{n} E(X_n) - 1 = \frac{n+1}{n} \left[\frac{n}{n+1} (m+1) \right] - 1 = (m+1) - 1$$

Conclusion $E(Y_n) = m$: Y_n est un estimateur sans biais de m ...

(5) on va montrer que f_n est l'unique fonction ne dépendant pas de m telle que $E(f_n(X_n)) = m$...

Soit g_n à valeurs réelles, $\forall g_n \in [n, +\infty[/$

$$\forall m \geq n, E(g_n(X_n)) = m.$$

a) $\forall m \geq n$, d'après ce qui précède et par application du théorème de transfert:

$$E(g_n(X_n)) = \sum_{k=n}^m g_n(k) \cdot P(X_n=k) = \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{k=n}^m g_n(k) \cdot \binom{k-1}{n-1} = m$$

Conclusion $\forall m \geq n, \sum_{k=n}^m g_n(k) \binom{k-1}{n-1} = m \binom{m}{n}$

b) En suivant les indications de l'énoncé:

$$\text{par le couple } (m+1, n): \sum_{k=n}^{m+1} g_n(k) \binom{k-1}{n-1} = (m+1) \binom{m+1}{n} \quad (L_1)$$

$$\text{par le couple } (m, n): \sum_{k=n}^m g_n(k) \binom{k-1}{n-1} = m \binom{m}{n} \quad (L_2)$$

par soustraction de (L_1) par (L_2) on a:

$$\begin{aligned} g_n(m+1) \cdot \binom{m}{n-1} &= (m+1) \binom{m+1}{n} - m \binom{m}{n} \\ &= (m+1) \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!} - m \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} g_n(m+1) &= \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{(m-n+1)!}}{m!} \left[(m+1) \frac{\cancel{(m+1)!}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{(m-n+1)!}} - m \frac{\cancel{m!}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{(m-n)!}} \right] \\ &= \frac{1}{n} [(m+1)^2 - m(m-n+1)] \\ &= \frac{1}{n} [m^2 + 2m + 1 - m^2 + m - m] \\ &= \frac{1}{n} [nm + m + 1] \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall m \geq n, \quad g_n(m+1) = \frac{n+1}{n} \cdot m + \frac{1}{n}$

c) Montrer ce qui précède:

$$\forall k \geq n+1, \quad g_n(k) = \frac{n+1}{n} (k-1) + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot k - 1.$$

et pour $k=n$; il reste à montrer $g_n(n) = f_n(n)$; $= f_n(k)$

$$\text{or } E(g_n(X_n)) = m = E(f_n(X_n)).$$

$$\text{Soit } \sum_{k=n}^m g_n(k) P(X_n=k) = \sum_{k=n}^m f_n(k) P(X_n=k)$$

$$\Leftrightarrow g_n(n) P(X_n=n) = f_n(n) P(X_n=n) \text{ avec } P(X_n=n) = \frac{1}{\binom{m}{n}}$$

$$\text{D'où } g_n(n) = f_n(n)$$

on peut conclure que :

$$\forall k \geq n : g_n(k) = f_n(k)$$

ou encore :

f_n est l'unique fonction à valeurs réelles, ne dépendant pas de m , telle que $\forall m \geq n$:

$$E(g_n(X_n)) = m.$$

Remarque

On pourra utiliser la fonction Python écrite à la question (1) pour vérifier que le moyenn empirique d'un N -échantillon de $Y_n = f_n(X_n)$ converge vers une valeur approchée de m ...