

Question de cours.

Donner la définition d'une base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence).

Exercice 4 :

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- ① La matrice A est-elle diagonalisable ?
Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f .
- ② La matrice A est-elle inversible ?
- ③ Écrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.
Tester cette fonction avec la matrice A .
- ④ Montrer que $\text{Im}(f) = E_1$
- ⑤ Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ codés sous forme de tableaux numpy ou de listes, et retournant leur produit scalaire.
- ⑥ a) Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\forall u \in E_0, \forall v \in E_1, \langle u, v \rangle = 0$$

- b) En déduire que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x) \in E_1 \text{ et } \forall y \in E_1, f(x) - x \text{ orthogonal à } y$$

On a donc montré que f était la projection orthogonale sur E_1 .

- ⑦ Déterminer une base orthonormale de E_1 . En déduire, en utilisant éventuellement la fonction `ps`, une valeur approchée de la distance du vecteur $t = (1, 2, 1)$ à l'espace E_1 à 10^{-2} près.

Informatique

On s'intéresse dans cet exercice à des listes d'entiers. L'utilisation de `max` ou de `count` est interdite.

- ① Écrire une fonction prenant en argument une liste d'entiers `L` et un entier `k`. Cette fonction renvoie `True` si tous les entiers de cette liste sont compris entre 0 et `k` et `False` sinon.
Par exemple : Pour `L=[0, 2, 0]` la fonction renvoie `True` si `k = 2` ou `k = 3` et `False` si `k = 1`.
- ② Écrire une fonction de mêmes arguments, où la liste est supposée ne contenir que des entiers compris entre 0 et `k`. Cette fonction renvoie l'élément le plus fréquent (ou l'un d'entre eux s'il y en a plusieurs).
Par exemple : Pour `L=[0, 4, 0, 1, 4]` et `k = 5` la fonction renvoie 0 ou 4.