

Question de cours.

Énoncer le théorème du rang.

Exercice 2 :

- ① Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge et calculer sa valeur. On pourra effectuer le changement de variable : $t = \sin^2(u)$.
- ② Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose aussi $Z = X^2 + Y^2$.
- Écrire une fonction en langage Python qui réalise une simulation de la variable aléatoire Z et qui renvoie 1 si l'événement : $[Z \leq 1]$ est réalisé, et 0 sinon.
 - Démontrer que la variable aléatoire X^2 est à densité et en donner une densité.
 - Démontrer que Z admet une densité f_Z vérifiant :

$$\forall x \in]0, 1], \quad f_Z(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$$

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité f_U et f_V , alors $U + V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt$$

- En déduire que f_Z est constante sur $]0, 1]$, et déterminer cette constante.
 - Montrer alors que $\mathbb{P}(Z \leq 1) = \frac{\pi}{4}$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- ③ Écrire une deuxième fonction en Python qui utilise la première fonction pour renvoyer une valeur approchée du nombre π .
- ④ Soient $Z_1, \dots, Z_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z . Pour tout entier k compris entre 1 et n , on note X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement $[Z_k \leq 1]$ est réalisé, et prend la valeur 0 sinon. Enfin, on pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Démontrer que :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \mathbb{P} \left(4\overline{X_n} - \frac{2}{\sqrt{n\alpha}} < \pi < 4\overline{X_n} + \frac{2}{\sqrt{n\alpha}} \right) \geq 1 - \alpha.$$

Informatique

- ① Rappeler la définition de la loi de poisson de paramètre λ . Écrire une fonction F d'arguments λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) et un entier naturel k et qui renvoie la valeur de $F_X(k)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
- ② On définit la fonction $G : \mathbb{R}_+^* \times [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit : $G(\lambda, x) = \min\{k / F(\lambda, k) > x\}$.
On admet que G est bien définie. Programmer G en Python.