

Exercice 125

① Convergence de $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$:

on note que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$ comme
inverse d'une fonction continue sur $[0,1]$
qui s'annule en 0 et en 1.

Effectuons le changement de variable proposé :

$$\begin{cases} t = \sin^2(u) \\ 0 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(u) = \sqrt{t} \\ 0 < \sqrt{t} < 1 \end{cases} \text{ avec } \sin \text{ bijection de }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ sur }]0,1[\text{ (strictement croissante)}$$

$\sin$ admet donc une fonction réciproque $\sin^{-1}$
(Aussi appelée Arcsin) bijection de $]0,1[$ sur $]0, \pi/2[$
strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

$$(\text{car } (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))} \text{ existe } \forall x \in]0,1[)$$

Donc

$\varphi: t \mapsto \sin^{-1}(\sqrt{t})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$
strictement croissante sur $]0,1[$ (composition de
fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissantes)

Or lors, I est de même nature que :

$$J = \int_a^b \frac{2 \sin(u) \cos(u) du}{\sqrt{\sin^2(u) (1 - \sin^2(u))}} \text{ avec } a = \varphi(0) = \sin^{-1}(0) = 0$$

$$b = \varphi(1) = \sin^{-1}(1) = \pi/2$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } J &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(u) \cos(u)}{|\sin(u)| \cdot |\cos(u)|} du \quad \left(\begin{aligned} &\text{car } \sqrt{1 - \sin^2(u)} \\ &= \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)| \end{aligned} \right) \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad \left(\begin{aligned} &\text{car } \sin(u) \geq 0 \text{ et} \\ &\cos(u) \geq 0 \quad \forall u \in [0, \pi/2] \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Conclusion

$$I \text{ converge et } I = J = \pi$$

② $X, Y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ deux var indépendantes
 $Z = X^2 + Y^2$

a) On importe le module random :
`import random as rd`
`pus,`

```
def simulz():
    X, Y = rd.random(), rd.random()
    return X**2 + Y**2 <= 1
```

b) $X^2(\Omega) = [0, 1]$ car $X(\Omega) = [0, 1]$
 $\bullet \forall x < 0, F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(\emptyset) = 0$
 $\bullet \forall x > 1, F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(\Omega) = 1$
 $\bullet \forall 0 \leq x \leq 1,$

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= P(0 \leq X \leq \sqrt{x}) \quad \text{car } X(\Omega) = [0, 1]$$

$$= F_X(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \quad \text{car } F_X(t) = t \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\text{D'où } F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de sorte F_X sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
 (car $F_X'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0, 1[, F_X'(x) = 0$ sinon)

Conclusion X^2 est une var à densité de densité

$$f_{X^2}: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0, 1[}(x)$$

c) Soit f_Z une densité de $Z = X^2 + Y^2$.
 X et Y sont indépendantes donc X^2 et Y^2
 sont indépendantes d'après le lemme de coalition
 de même densité obtenue en ②)

$$Z(\omega) = [0, 2] \text{ car } X^e(\omega) = [0, 1) = Y^e(\omega)$$

$$\forall x \in [0, 1),$$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^e}(t) f_{Y^e}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \frac{1}{2\sqrt{x-t}} \mathbb{1}_{]0,1)}(t) \cdot \mathbb{1}_{]0,1)}(x-t) dt \end{aligned}$$

avec $\mathbb{1}_{]0,1)}(x-t) = 1 \Leftrightarrow 0 < x-t \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq t < x$
 d'où

$$f_Z(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{x-t}} \mathbb{1}_{]0,1)} \cap [x-1, x[}(t) dt$$

$]0,1) \cap [x-1, x[=]0,2[$

Conclusion $\forall x \in]0,1), f_Z(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}}$

d) Montrons que f_Z est constante sur $]0,1)$:
 Utilisons pour ça la question a) en effectuant
 le changement de variable
 $s = \frac{t}{x} = \varphi_x(t)$ où $\varphi_x \in \mathcal{C}^1([0, x])$, strictement
 croissante sur $[0, x)$

Donc $f_Z(x)$ est de même nature que

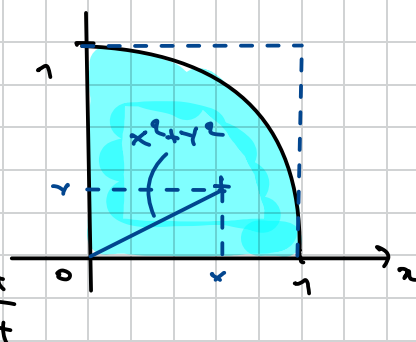
$$\frac{1}{4} \int_{0/x}^{x/x} \frac{2 ds}{\sqrt{xs(x-xs)}} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} \text{ qui converge.}$$

d'où, $\forall x \in]0,1), f_Z(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \pi/4$

e) $P(Z \leq 1) = \int_{-\infty}^1 f_Z(x) dx = \int_0^1 \underbrace{f_Z(x)}_{=\pi/4} dx$ [d'après la relation de Choles]

Conclusion

$$P(Z \leq 1) = \frac{\pi}{4}$$



$$P((X, Y) \in [0, 1]^2) = 1$$

• l'aire du quart de disque de rayon 1 vaut $\frac{\pi}{4}$

les couples (x, y) étant uniformément répartis au sein du carré de côté de longueur 1, on a:

$$P(Z \leq 1) = P((X, Y) \in D) = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

si D le domaine représenté en bleu ci-dessus.

③ On utilise la loi faible des grands nombres et on estime $P(Z \leq 1)$ en répétant un nombre m de fois (supposé grand) l'appel à la fonction écrite au ②) [dont les résultats sont supposés indépendants] et on renvoie la fréquence des succès qui sera d'autant plus proche de $\pi/4$ que m est grand. Il suffit alors de multiplier par 4 pour obtenir une estimation de π .

```
def estimPi(m=10000):  
    S = 0  
    for k in range(m):  
        S += multt()  
    return 4*S/m
```

Remarque: la convergence est très lente...
Pour $m=10\,000$, on obtient:
 $\pi \approx 3,12$; Pour $m=10^5$, $\pi \approx 3,14$

④ $z_1, \dots, z_n \sim \text{VAR}$ indépendantes de même loi que z .
 Soit $\theta = P(z_k \leq 1) = \pi/4$
 Alors,

$$X_k \sim \mathcal{B}(\pi/4)$$

par linéarité de $\mathbb{E}$

$$\bar{X}_n = \sum_{k=1}^n X_k / n ; \quad \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \quad \text{car les } X_k \text{ sont indépendantes puisque les } z_k \text{ le sont.}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\pi/4 (1 - \pi/4)}{n \varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(\left|4\bar{X}_n - \pi\right| < 4\varepsilon\right) \leq \frac{\pi/4 (1 - \pi/4)}{n \varepsilon^2}$$

On pose: $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sqrt{\alpha}$ $\underbrace{4 \cdot \pi/4 (1 - \pi/4)}_{\approx 0.7}$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|4\bar{X}_n - \pi\right| < \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha \pi (1 - \frac{\pi}{4}) > 1 - \alpha$$

$$\text{car } 1 - \alpha \pi (1 - \frac{\pi}{4}) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha \pi (1 - \frac{\pi}{4}) < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \pi (1 - \pi/4) < 1 \quad \text{car } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \pi (4 - \pi) < 4$$

ce qui est vrai car $0 < 4 - \pi < 1 \Rightarrow \underbrace{\pi(4 - \pi)}_{\approx 0.7} < \pi < 3.14$

Conclusion
$$P\left(4\bar{X}_n - \frac{2}{\sqrt{n\alpha}} < \pi < 4\bar{X}_n + \frac{2}{\sqrt{n\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha$$

à $0 < \alpha < 1$ pour que cette probabilité ait un sens...