

**Question de cours.**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies au voisinage de  $+\infty$  et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase : «  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $+\infty$  » ?

**Exercice 1 :**

- ① On considère les équations différentielles suivantes, d'inconnue  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  :

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (\text{H})$$

$$y'' - 4y' + 5y = 2 - e^{2x} \quad (\text{E})$$

- a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).  
 b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).  
 On pourra chercher une solution particulière  $y_0$  de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$$

sous la forme  $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$ , où  $c$  est un réel à déterminer.

- ② Pour tout réel  $x$ , on note  $C(x) = \int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$  et  $S(x) = \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt$ .

a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2}S(x)$  et  $S(x) = \frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2}C(x)$ .

- b) En déduire une primitive de  $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$  et une primitive de  $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- ③ Écrire une fonction en langage Python, nommée `intC`, prenant en paramètres un réel  $x$ , et un entier `nb_pas`, qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale  $\int_0^x e^{2t} \cos(t) dt$  obtenue à l'aide de la méthode des rectangles. L'intervalle  $[0; x]$  doit être découpé en `nb_pas` intervalles de même longueur.  
 Dans toute la suite, on note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 On considère les quatre fonctions suivantes de  $E$  :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{2x} \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto e^{2x} \sin(x).$$

On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ .

- ④ Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .  
 ⑤ On note  $u$  l'application définie sur  $F$  par  $u(f) = f'$  pour tout  $f \in F$ .  
 a) Montrer que  $u$  est linéaire.  
 b) Calculer l'image par  $u$  de  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$ .  
 c) En déduire que  $u$  est un endomorphisme de  $F$ , et déterminer la matrice représentative  $A$  de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- ⑥ Résoudre l'équation  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ . Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

- ⑦ Résoudre l'équation  $(A^2 - 4A + 5I_4)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .

Quel résultat des questions précédentes retrouve-t-on ainsi ? Justifier.

## Informatique

Une grille de *Takuzu* ou *Binairo* est une grille carrée à  $n$  lignes et autant de colonnes avec  $n$  pair. Au départ, chaque case peut contenir 0, 1 ou être vide. En Python, une grille est codée par une liste de listes, les cases vides étant représentées par `None`.

Par exemple, la grille

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 |   | 0 |
| 1 |   | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |   |

est codée par la liste `[[0, 1, None, 0], [1, None, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, None]]`. Dans la suite, on identifie la *grille* et la liste qui la représente.

- ① Écrire une fonction prenant en argument une telle grille et renvoyant le nombre de cases non remplies.
- ② Écrire une fonction prenant en argument une telle grille et renvoyant un booléen testant s'il existe deux lignes identiques.