

Oraux blancs - planche 1

Exercice :

1. a) On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est : $x^2 - 4x + 5 = 0$. On trouve $\Delta = -4 < 0$, deux racines complexes conjuguées $2 \pm i$.

Donc l'ensemble solution de (H) est : $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto e^{2x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

- b) Il reste à chercher une solution particulière. Au vu de l'indication de l'énoncé, on va utiliser le principe de superposition.

On sait déjà que la solution constante $y : t \mapsto \frac{2}{5}$ est solution de $y'' - 4y' + 5y = 2$.

Cherchons une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 5y = -e^{2x}$ sous la forme $y_0 : x \mapsto ce^{2x}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

y_0 est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $y_0' : x \mapsto 2ce^{2x}$ et $y_0'' : x \mapsto 4ce^{2x}$. Donc y_0 solution si et seulement si $(4c - 4 \times 2c + 5 \times c)e^{2x} = -e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Il suffit de choisir c tel que $4c - 4 \times 2c + 5 \times c = -1 : c = -1$ convient.

Donc par principe de superposition, $y_p : x \mapsto \frac{2}{5} - e^{2x}$ est une solution particulière de (E) .

Donc l'ensemble solution de (E) est : $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto e^{2x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \frac{2}{5} - e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. a) On fixe x et on effectue une intégration par parties sur $C(x)$ en posant $u(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = e^{2t}$. Alors $u'(t) = -\sin(t)$ et $v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$C(x) = \left[\frac{1}{2} \cos(t) e^{2t} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} \sin(t) dt = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} S(x).$$

Même raisonnement pour $S(x)$.

- b) D'après le théorème fondamental, comme $t \mapsto e^{2t} \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction C est une primitive de $t \mapsto e^{2t} \cos(t)$ (c'est même l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0). Donc une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$ est $C(x)$.

$$\text{Or d'après (a), pour tout } x \in \mathbb{R}, C(x) = \frac{e^{2x} \cos(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} \sin(x)}{2} - \frac{1}{2} C(x) \right)$$

$$\text{donc } C(x) = \frac{2}{5} e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{5} e^{2x} \sin(x) - \frac{2}{5}.$$

De même une primitive de $x \mapsto e^{2x} \sin x$ est S et on a après calculs :

$$S(x) = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} \text{ pour tout réel } x.$$

3. La démarche est un peu curieuse, vu que l'on a une expression exacte de $C(x)$... mais il faut toujours faire ce qui est demandé ! Cette expression exacte permettra (si besoin) de vérifier le résultat obtenu avec la méthode des rectangles.

def f(x):

 return exp(2*x)*cos(x)

def intC(x,nb_pas):

 S=0

 for k in range(nb_pas):

 S+=f(k*x/nb_pas)

 return S*x/nb_pas

4. Par définition, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F , donc il reste à montrer qu'elle est libre.
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a + be^{2x} + ce^{2x} \cos(x) + de^{2x} \sin(x) = 0$.

En particulier, pour $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ on obtient un système à 4 équations 4 inconnues : en regardant $L_2 - L_1$ et $L_4 - L_3$ on peut montrer que $b = -d$ et $a = -c$ donc en réinjectant dans L_1 : $b = 0$ (donc $d = 0$) et dans L_4 : $a = 0$ (donc $c = 0$).

Donc $\mathcal{B}$ est une base de F , et F est de dimension 4.

5. a) La linéarité de u découle directement de la linéarité de la dérivation.
b) $u(f_1) = 0$, $u(f_2) = 2f_2$, $u(f_3) = 2f_3 - f_4$ (penser à bien dériver un produit) et $u(f_4) = 2f_4 + f_3$.
c) On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $u(f_i) \in F$. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de F , pour toute fonction $f \in F$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$. Donc par linéarité de u : $u(f) = au(f_1) + bu(f_2) + cu(f_3) + du(f_4) \in F$ par stabilité de F par combinaison linéaire. Donc u est un endomorphisme de F , et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$

$$\text{est } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ Posons } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \text{ Alors } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Cette résolution revient à la résolution $u(f) = f_3$, avec $f \in F$, c'est-à-dire à la résolution $f' = f_3$ (avec $f \in F$).

On vient de redémontrer que les primitives de f_3 sont de la forme : $af_1 + \frac{2}{5}f_3 + \frac{1}{5}f_4$. A la constante près, c'est la forme trouvée à la question 2.(b).

$$7. \text{ On trouve } A^2 - 4A + 5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

cette matrice représente l'endomorphisme de $F : f \mapsto f'' - 4f' + 5f$.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente la fonction $2f_1 - f_2 : x \mapsto 2 - e^{2x}$. Autrement dit, la résolution

demandée permet de retrouver une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la question 1 (solution qui appartiendra à F).

Vérification : en reprenant les notations de la 6. pour X :

$$(A^2 - 4A + 5I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim X = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ matrice qui représente la fonction } x \mapsto \frac{2}{5} - e^{2x} :$$

c'est bien y_p !