Exercice 7 - td 9 _ ESPACES VECTORIELS

$n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ sont n réels distincts

On pose $L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

① Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$\underline{L_k(a_k)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1$

et pour $\underline{j \neq k :}$ $L_k(a_j) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} \right) \times \underbrace{\frac{a_j - a_j}{a_k - a_j}}_{= 0} = 0$

Conclusion : $\forall (j, k) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\boxed{L_k(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}}$$

② Montrons que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

→ On commence par noter que :

$\underline{\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])}$

il est donc suffisant de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base.

⚠ Surtout ne pas dire que si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ alors la famille est génératrice car ce n'est pas le cas

[Par exemple : si $P_0(x) = 2x$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = 3x$, cette famille est de cardinal 3 sans pour autant être génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$...!]

→ Montrons que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(i) D'abord, ce sont bien des polynômes à coefficients réels, de degré égale à $(n-1)$ puisque :

$$\deg(L_k) = \deg\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \deg(X - a_i) = n - 1$$

Donc $\underline{\forall k \in [\![1, n]\!],\ L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

(ii) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k = 0 \quad (*)$

$(*) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(x) = 0$

Et pour tout $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(a_j) = 0 \quad (**)$

$(**) \Leftrightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \lambda_k L_k(a_j) + \lambda_j L_j(a_j) = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = 0$ d'après ①.

Conclusion : $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ libre et de cardinal égale à $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

③ Par définition d'une base, tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ admet une décomposition unique dans cette base.

→ Déterminons cette décomposition :

$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k$

En exploitant la question ① on a immédiatement :

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k(a_j) = \alpha_j . 1 = \alpha_j$

Conclusion $\boxed{P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k = (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))_{\mathcal{L}}}$

④ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, déterminons $P = \sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

d'après ce qui précède, on a : $P(a_i) = a_i^p \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$.

→ Montrons que $P(X) = X^p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (puisque $0 \leq p \leq n-1$)

Pour ça, on pose $Q(X) = X^p$ et $R(X) = P(X) - Q(X)$

alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $R(a_i) = P(a_i) - Q(a_i) = a_i^p - a_i^p = 0$

Donc $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et admet n racines distinctes

D'où R est le polynome nul et donc $P = Q = X^p$

Conclusion $\sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i(X) = X^p$ et ce $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$

ou encore : $X^p = (a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)_{\mathcal{L}}$

Conséquence : Si $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$