15 T.D. Produits scalaires.

Extension des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n avec la mise en place de deux résultats fondamentaux pour les applications : la projection orthogonale sur un sous-espace d'une part et la diagonalisation des matrices symétriques d'autre part. »
Exemple de capacités : Calculer une projection orthogonale, une plus courte distance.

Exercice 1 : ✶ Inégalité de Cauchy-Schwarz

① Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq n^2$$

② Soit E l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série $\sum x_n^2$ converge.
Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : ✶ Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$.

① Démontrer que $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], (x|u_i) = 0$.

② On suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}\{v\}$ où $v = (1, 2, 1)$.
Donner une équation caractérisant $F^\perp$ et en déduire une base orthonormée.

Exercice 3 : Matrices symétriques

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n. On pose $S = A \cdot A^T$.
Montrer que S est symétrique et diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Exercice 4 : Matrices symétriques

Diagonaliser les matrices symétriques réelles ci-dessous dans une base orthonormée.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel. On cherche à déterminer $\mathcal{C} = \{M(x, y)/x^2 + xy + y^2 = 3\}$.

① Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = x$.

② Soit $u = (x, y) \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer une matrice $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que : $x^2 + xy + y^2 = {}^tXAX$.

③ Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.
On nommera P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

④ Montrer que $x^2 + xy + y^2 = 3 \Leftrightarrow {}^tX'DX' = 3$ où $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ et D est une matrice diagonale.

⑤ Représenter dans la base $\mathcal{B}'$ les points M cherchés.
En déduire une représentation de $\mathcal{C}$ dans la base canonique.

Exercice 6 : ✶

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite F d'équation $x = y = z$ ainsi que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 7 : ✶✶

Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par une base orthonormée $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et soit $\vec{n}$, vecteur normal au plan de norme égale à 1.

① Justifier que pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{w} = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} > \overrightarrow{u} + < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > \overrightarrow{v} + < \overrightarrow{n}, \vec{w} > \overrightarrow{n}$$

② Justifier que si p désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, alors :

$$p(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} - < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w} > \overrightarrow{n}$$

③ Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée W et N (listes contenant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{n}$) permettant de calculer les coordonnées du projeté orthogonal de $\overrightarrow{w}$ sur le plan de vecteur normale $\overrightarrow{n}$.

✐ Attention : dans ce cas, la norme de $\overrightarrow{n}$ n'est pas nécessairement égale à 1

Application : Déterminer le projeté orthogonale de $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1)$ sur le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 0$.

Exercice 8 : ✶ Projections et distance minimale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (2x + y - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 1)^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ en interprétant $f(x, y)$ comme $\|X - v\|^2$ où $X \in F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ qu'on déterminera.

Exercice 9 : ✶✶✶ oral Agro-véto 2023

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels

① Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geq 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \cdots, d_n)$.

a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^T D X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$.

b. En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T D X > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

② Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et B une matrice symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les vecteurs

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que U_1 est un vecteur propre de A.
b. Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3).
c. Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^{-1}$ et $P^TP = I_3$.
d. En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $A = MM^T$.
e. Vérifier que $C = M^{-1}B(M^{-1})^T$ est une matrice symétrique. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $B = MQ\Delta(MQ)^T$.
On pose $R = MQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^T$.
f. Calculer RR^T.

③ On conserve les hypothèses et les notations de la question 2. On suppose de plus que $X^TAX > X^TBX$ pour tout vecteur X non nul de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a. Donner une matrice diagonale S dépendant de la matrice Δ telle que $Y^TSY > 0$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
b. En déduire que les coefficients diagonaux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1.