Nom : **Prénom :** **Note de l'interro n° 15 :**

Réduction d'endomorphismes

Dans l'ensemble des questions, f désigne un endomorphisme de E qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. — Définition de valeur propre de f : λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \cdots$

   — Que peut-on dire de f si $0 \in \mathrm{Sp}(f)$?

---

2. — Si λ in $\mathrm{Sp}(f)$, qu'appelle-t-on E_λ ?

   — Quelle relation existe-t-il entre $\dim(E_\lambda)$ et $\dim(E)$ (on veut une égalité) ?

---

3. — Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable :

   — $\#(\mathrm{Sp}(f)) = n$ est une condition nécessaire **ou** suffisante de diagonalisation ?

---

4. *Un exemple :* f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. On obtient que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$ avec $E_1 = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{u_3\}$ où

$$u_1 = (0, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, -1) \text{ et } u_3 = (0, 1, 1)$$

a) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. Pourquoi $\mathcal{B}'$ est-elle une base de E ?

b) Quelle est la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$?

c) Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

d) Si $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$, quelle relation existe-t-il entre A et D ?