Variables aléatoires discrètes et algèbre linéaire

Exercice 1 :

On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.
Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n°4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

① a) X est le nombre de pils en n lancers indépendants, la probabilité de pile à chaque lancer étant p.

Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ et } \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \text{ pour } k \in X(\Omega) = [[0,n]]}$

Conclusion : $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$

b) On a alors $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$ et $E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2$

Conclusion : $\boxed{E(X) = np(1-p+np)}$

c) Quand $X = 0$, on tire une boule de l'urne 0 qui contient 0 vertes et n rouges. On tirera donc une boule rouge (l'évènement $(Y=0)$ est réalisé) et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{(X=0)}(Y=0) = 1}$

et de même si $X = n$, il n'y a que des boules vertes (on tirera donc une rouge) et

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{(X=n)}(Y=0) = 0}$

Si X et Y sont indépendantes alors $P_{(X=0)}(Y=0) = \mathrm{P}(Y=0) = P_{(X=n)}(Y=0)$. ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

d) Quand $X = k$, on tire une boule de l'urne k qui contient k vertes et $n-k$ rouges.

Ces n boules étant équiprobables

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{(X=k)}(Y=1) = \dfrac{k}{n}.}$

e) $(X=k)_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, donc (probabilités totales)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{(X=k)}(Y=1)\mathrm{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\mathrm{P}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X=k) \\
&= \frac{E(X)}{n} \text{ car } X(\Omega) = [[1,n]]
\end{aligned}$$

f) Comme les valeurs de Y sont $\{0,1\}$ on a donc

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et } E(Y) = p}$

g) D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in Y(\Omega)} k\ i\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = i) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) + 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) + 0 \text{ pour } k = 0 \end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) = \mathrm{P}(X = k)\, \mathrm{P}_{X=k}(Y = 1) = \mathrm{P}(X = k)\, \dfrac{k}{n}$ donc

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{k}{n}\ \mathrm{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k^2\ \mathrm{P}(X = k) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k \cap Y = 1) = \dfrac{E(X^2)}{n}.}$

h) On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= E(XY) - E(X)\, E(Y) \\ &= \frac{E(X^2)}{n} - \frac{E(X)^2}{n} \\ &= \frac{1}{n} V(X) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{p}(1 - \mathrm{p})}$

Exercice 2 :

① **La cas des variables aléatoires discrètes finies**. Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $I_n = [\![0, n]\!]$.

a) *Montrons que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?*
Si $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$, alors $a_k = \mathbb{P}(X = k) = 0$, $\forall k > n$. D'où :
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Ce qui prouve que g_X est un polynôme de degré **au plus** n.
$g_X(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$.
Conclusion : $\boxed{g_X(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB 2011] Certains candidats conservent des séries et parlent de polynômes de degré infini. On voit des formules mathématiques fausses, par exemple : pour tout k de I_n, pour tout x $g_x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, quelques résultats fantaisistes, par exemple : $g_X(1) = a_0 + a_1$*

ou $g_X(1) = \dfrac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$ ».

b) g_X est une fonction polynôme. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Un calcul immédiat donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k k t^{k-1}$$

soit

$$\boxed{g_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k k = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)}$$

De même :

$$g_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)t^{k-2} \text{ et donc } g_X''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

D'après le théorème de transfert.

Dès lors, d'après le théorème de Koënig-Huygens et par linéarité de l'intégrale :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}^2(X)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2}$

c) *Calculons la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$:*
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n$. (On a posé $q = 1 - p$).

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB-2011] Résultat trouvé dans environ 60% des copies* ».

Retrouvons grâce à cette fonction l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p : Il suffit, d'après 1.c) de calculer $g_X'(t) = np(pt+q)^{n-1}$ et $g_X''(t) = n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2}$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) = g_X'(1) = np(p+q) = np}$ et
$\boxed{V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)}$

② **La cas des variables aléatoires discrètes infinies**.

a) *Montrons que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1, 1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$:*

$\forall t \in [-1, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.

Par définition d'une loi de probabilité (σ-additivité), la série $\sum a_n$ converge, et sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ vaut 1 car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs nous pouvons conclure que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence.

Conclusion : $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1, 1] \text{ et } g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1}$.

Remarque : On pouvait aussi écrire que $\forall t \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n t^n| \leqslant |t^n|$.
Or, $\forall t \in]-1,1[$, $\sum |t^n| = \sum |t|^n$ converge car c'est une série géométrique avec $|t| < 1$ donc, par application du théorème de comparaison, $\sum |a_n t^n|$ converge.
Par ailleurs, pour $|t| = 1$, $\sum |a_n t^n| = \sum |a_n| = \sum a_n$ converge de somme égale à 1. Ce qui permet de conclure que $\sum a_n t^n$ converge absolument et donc que g_X est défini sur $[-1,1]$.

Lu dans le rapport de jury : « *Question très rarement bien traitée (10% des candidats montrent correctement l'absolue convergence).*
La majoration $|a_k t^k| \leq |t^k|$ ne permet de montrer l'absolue convergence que lorsque $|t| < 1$. Le cas $|t| = 1$ doit alors être étudié à part, ce que les candidats remarquent très rarement. La solution la plus rapide consiste à effectuer la majoration $|a_k t^k| \leq a_k$. Quelques candidats se lancent dans des calculs avec des séries ! !
Parmi les erreurs rencontrées dans plusieurs copies, on trouve :
- la série de terme général $a_k|t|^k$ est une série géométrique...
- $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_k t^k| = 0$, donc la série est absolument convergente... - $a_k|t|^k$ est majorée par 1, donc la série est absolument convergente...
- des candidats écrivent $|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k| \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k|t|^k$, pour en déduire la convergence de la série... »

b) Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. *Montrons que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$:*

Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in [-1,1]$ les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après l'énoncé.
Donc $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

c) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ (on pourra poser $q = 1-p$). En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.*

On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
Alors la question 2.a) justifie l'existence de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$ (sinon on écrit que la série $\sum\limits_{k\geq 1} pq^{k-1}t^k$ est de même nature que $\sum\limits_{k\geq 1}(qt)^{k-1} = \sum\limits_{i\geq 0}(qt)^i$ qui est une série géométrique convergente car $|qt| = q|t| \leq q < 1$ puisque $|t| \leq 1$).

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=0}^{+\infty}(qt)^k = \frac{pt}{1-qt}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question a permis aux élèves moyens, mais sérieux, de faire la différence.*
Attention, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: trop de candidats ont commencé la somme à 0. Trop ont oublié ou n'ont pas justifié correctement la convergence de la série géométrique. »

On rappelle ensuite que $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.
Or $g'_X(t) = \dfrac{p(1-qt) + qpt}{(1-qt)^2} = \dfrac{p}{(1-qt)^2}$.
✐ On note que $\forall t \in [-1,1]$, $1 - qt \neq 0$ puisque $t = 1/q$ impossible (en effet : $\frac{1}{q} > 1$)

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}}$

✐ Pour la méthode « usuelles », on se rapportera au cours.

d) On suppose ici que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

i. ☺ *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ et retrouvons l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$:*

On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Alors,$\forall t \in [-1,1]$, $g_X(t)$ est la somme d'une série convergente et :

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent bien traitée.* »

Pour $\mathbb{E}(X)$, $g'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda}$

ii. ☺ Si X et Y sont deux variables indépendantes qui suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et μ. *Déterminons $g_{X+Y}(t)$ et en déduire que $X+Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre :*

Par application de la question 2.b) on obtient que $S = X+Y$ admet pour fonction génératrice :

$$g_S(t) = g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
La fonction génératrice caractérisant la loi d'une variable aléatoire, on peut conclure que :

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)}$$

Problème :

Partie 1

Dans cette partie , $N = 3$.

1. Que dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?
   — Si $k_0 = 0$, alors il n'y a initialement aucune bactérie de type A. Ce sera le cas sur chacun des tirages. Les variables aléatoires X_n sont donc toutes des variables aléatoires certaines égales à 0. Ou encore :
   Conclusion : $\boxed{(X_n) \text{ est la suite constante égale à } O}$

   — Si $k_0 = 3$, alors il n'y a initialement que des bactérie de type A. Ce sera le cas sur chacun des tirages. Les variables aléatoires X_n sont donc toutes des variables aléatoires certaines égales à 3. Ou encore :
   Conclusion : $\boxed{(X_n) \text{ est la suite constante égale à } 3}$

   On suppose désormais, dans la suite de cette partie que $k_0 = 1$.

2. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

$$((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3))$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_{n+1}=0\right) &= \mathrm{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=0\right)\mathrm{P}\left(X_n=0\right)+\mathrm{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=0\right)\mathrm{P}\left(X_n=1\right)\\
&\quad +\mathrm{P}_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=0\right)\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+\mathrm{P}_{(X_n=3)}\left(X_{n+1}=0\right)\mathrm{P}\left(X_n=3\right)\\
&= \mathrm{P}\left(X_n=0\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^3\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\\
&= \mathrm{P}\left(X_n=0\right)+\frac{8}{27}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\frac{1}{27}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)
\end{aligned}$$

car la loi conditionnelle de X_{n+1} est :

— la loi certaine égale à 0 si $(X_n=0)$ est réalisé et donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=1$
— la loi $\mathcal{B}\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$ si $(X_n=1)$ est réalisé et donc $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\binom{3}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.
— la loi $\mathcal{B}\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ si $(X_n=2)$ est réalisé.
— la loi certaine égale à 3 si $(X_n=3)$ est réalisé.

et on a de même, toujours par application de la formule des probabilités totales :

— $\mathrm{P}_{X_n=0}\left(X_{n+1}=1\right)=0$: $\mathrm{P}_{X_n=1}\left(X_{n+1}=1\right)=3\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$:
$\mathrm{P}_{X_n=2}\left(X_{n+1}=1\right)=3\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$: $\mathrm{P}_{X_n=3}\left(X_{n+1}=1\right)=0$
donc $\mathrm{P}\left(X_{n+1}=1\right)=\dfrac{4}{9}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\dfrac{2}{9}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)$
— $\mathrm{P}_{X_n=1}\left(X_{n+1}=2\right)=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$: $\mathrm{P}_{X_n=2}\left(X_{n+1}=2\right)=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$
donc $\mathrm{P}\left(X_{n+1}=2\right)=\dfrac{4}{9}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\dfrac{2}{9}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)$
— $\mathrm{P}_{X_n=1}\left(X_{n+1}=3\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$: $\mathrm{P}_{X_n=2}\left(X_{n+1}=1\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$
donc $\mathrm{P}\left(X_{n+1}=3\right)=\dfrac{1}{27}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\dfrac{8}{27}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+\mathrm{P}\left(X_n=3\right)$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathrm{P}\left(X_{n+1}=0\right)\\ \mathrm{P}\left(X_{n+1}=1\right)\\ \mathrm{P}\left(X_{n+1}=2\right)\\ \mathrm{P}\left(X_{n+1}=3\right)\end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix}\mathrm{P}\left(X_n=0\right)+\frac{8}{27}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\frac{1}{27}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\\ \frac{4}{9}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\frac{2}{9}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\\ \frac{4}{9}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\frac{2}{9}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\\ \frac{1}{27}\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\frac{8}{27}\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+\mathrm{P}\left(X_n=3\right)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&\frac{8}{27}&\frac{1}{27}&0\\ 0&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&0\\ 0&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&0\\ 0&\frac{1}{27}&\frac{8}{27}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{P}\left(X_n=0\right)\\ \mathrm{P}\left(X_n=1\right)\\ \mathrm{P}\left(X_n=2\right)\\ \mathrm{P}\left(X_n=3\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{U_{n+1}=A\,U_n}$

3. a) On a $V\,A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{8}{27}&\frac{1}{27}&0\\ 0&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&0\\ 0&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&0\\ 0&\frac{1}{27}&\frac{8}{27}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\dfrac{27}{27}&\dfrac{54}{27}&3\end{pmatrix}=V$

b) Comme les valeurs de X_n sont $\{0,1,2,3\}$ alors
$E(X_n) = 0\text{P}(X_n=0) + 1\text{P}(X_n=1) + 2\text{P}(X_n=2) + 3\text{P}(X_n=3) = VU_n$
Or $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc une récurrence usuelle permet de montrer que
$U_n = A^n U_0$ et $E(X_n) = VU_n = V\,A^n U_0 = V\,U_0 = E(X_0) = 1$
(on peut aussi remarquer que $E(X_{n+1}) = V\,U_{n+1} = V\,A\,U_n = V\,U_n$ donc la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut 1)
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n : E(X_n) = 1}$

4. a) $$W\,A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{12}{9} & \dfrac{12}{9} & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}W$$

b) **N.B.** les variables X_n et $(3 - X_n)$ ne sont pas indépendantes donc l'espérance du produit n'est pas simplement le produit des espérances.
On revient au théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X_n(3-X_n)) &= 0(3-0)\,\text{P}(X_n=0) + 1(3-1)\,\text{P}(X_n=1) \\ &\quad +2(3-2)\,\text{P}(X_n=2) + 3(3-3)(X_n=2) \\ &= 2\text{P}(X_n=1) + 2\text{P}(X_n=2) \\ &= W\,U_n \end{aligned}$$

Comme précédemment, $E(X_{n+1}(3-X_{n+1})) = W\,U_{n+1} = W\,A\,U_n = \frac{2}{3}W\,U_n = \frac{2}{3}E(X_n(3-X_n))$
La suite $[E(X_n(3-X_n))]_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et
$E(X_n(3-X_n)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n E(X_0(3-X_0))$
avec $X_0(3-X_0) = 2$ (variable certaine) et donc $E(X_0(3-X_0)) = 2$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n : E(X_n(3-X_n)) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

c) Comme $E(X_n(3-X_n)) = 2\text{P}(X_n=1) + 2\text{P}(X_n=2)$ alors
$$\text{P}(X_n=1) + \text{P}(X_n=2) = \frac{1}{2}E(X_n(3-X_n)) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Conclusion : $\boxed{\text{P}(X_n=1) + \text{P}(X_n=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

d) Comme $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ alors $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ et comme les probabilités sont positives, par encadrement $\text{P}(X_n=1) \to 0$ et $\text{P}(X_n=2) \to 0$
En réutilisant l'espérance de X_n : $1 = E(X_n) = \text{P}(X_n=1) + 2\text{P}(X_n=2) + 3\text{P}(X_n=3)$ alors
$\text{P}(X_n=3) = \frac{1}{3}(1 - \text{P}(X_n=1) - 2\text{P}(X_n=2)) \to \frac{1}{3}$
Enfin, $\{(X_n=0),(X_n=1),(X_n=2),(X_n=3)\}$ étant un système complet d'événements, $\text{P}(X_n=0) + \text{P}(X_n=1) + \text{P}(X_n=2) + \text{P}(X_n=3) = 1$ et donc $\text{P}(X_n=0) = 1 - \text{P}(X_n=1) - \text{P}(X_n=2) - \text{P}(X_n=3) \to \frac{2}{3}$
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{ll} \text{Quand } n \to +\infty : & \text{P}(X_n=0) \to \frac{2}{3} : \text{P}(X_n=1) \to 0 \\ & \text{P}(X_n=2) \to 0 : \text{P}(X_n=3) \to \frac{1}{3} \end{array}}$

e) Comme $F_n = \frac{X_n}{3}$ $\text{P}(F_n=0) \to \frac{2}{3} : \text{P}\left(F_n=\frac{1}{3}\right) \to 0 : \text{P}\left(F_n=\frac{2}{3}\right) \to 0$ et $\text{P}(F_n=1) \to \frac{1}{3}$
Conclusion : $\boxed{(F_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge en loi vers une loi de Bernouilli de paramètre } \frac{1}{3}}$.

Interprétation : Plus on répète l'expérience plus la population devient homogène. La probabilité qu'elle se compose, à terme, uniquement des bactéries de type A vaut $1/3$ et la probabilité qu'elle tende vers une population uniquement composée de bactéries de type B vaut $2/3$.

f) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 3) &= \mathrm{P}(X_n = 0 \cup X_n = 3) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_n = 1 \cup X_n = 2) \text{ incompatibles} \\
&= 1 - [\mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2)] \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 3) > 0,95 &\iff \left(\frac{2}{3}\right)^n < \ln(0,05) \\
&\iff n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(0,05) \\
&\iff n > \ln(0,05) / \ln\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 7,3
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{n = 8 \text{ est le plus petit entier tel que } \mathrm{P}(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 3) > 0,95}$
(avec une confiance de 95 pour cent, le **huitième prélèvement** donnera une population homogène, uniquement composée de bactéries de type A ou B.)

5. a) On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule les produits :

$$A\,Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{2}{9} Y_2$$ et $Y_2 \neq 0$ donc Y_2 est une colonne propre de A associée à la valeur propre $\frac{2}{9}$

$$A\,Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} Y_3$$ donc Y_3 est colonne propres de A associée à $\frac{2}{3}$

b) On a de plus $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ associées à 1

(Y_1, Y_4) est libre (échelonnée) associée à 1
(Y_2) est libre associée à $\frac{2}{9}$ et (Y_3) est libre associée à $\frac{2}{3}$ donc la concaténation de ces familles libre forme une famille libre de $\mathbb{R}^4$ donc (cardinal=4) une base de $\mathbb{R}^4$
$\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$
Donc avec P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ et on a $P^{-1}AP = D$ qui est diagonale.

c) On a $A^n = P\,D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

P^{-1} se calculant par la méthode de Gauss. On trouve :$P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

d'où

$$\begin{aligned} A^n &= P\,D^n P^{-1} = \frac{1}{6} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{2}{9}\right)^n & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 \\ 0 & -3\left(\frac{2}{3}\right)^n & -3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 4 - \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & -3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & -3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 4 - \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. a) Comme X_0 est la variable ceraine égale à 1 on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_n = A^n U_0$ est la seconde colonne de A^n donc la loi de X_n est donnée par :
$\mathrm{P}(X_n = 0) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ $\quad \mathrm{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)$
$\mathrm{P}(X_n = 2) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)$ $\quad \mathrm{P}(X_n = 3) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

   b) et comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$ ces différentes quantités tendent respectivement vers $\frac{2}{3}$, 0, 0 et $\frac{1}{3}$ comme trouvé au **4.e)**

7. On définir la variable aléatoire T par :
— si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq 3)$, alors $T = 0$
— sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 3)$
On pose pour tout entier n, $v_n = \mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2)$

   a) On a $(T_n = n) = (X_n = 0 \cup X_n = 3) \cap (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$,
   $(T_n = n) = \overline{(X_n = 1 \cup X_n = 2)} \cap (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$
   $= (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2) \setminus (X_n = 1 \cup X_n = 2)$
   Comme $(X_n = 1 \cup X_n = 2) \subset (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_n = n) &= \mathrm{P}(X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2) - \mathrm{P}(X_n = 1 \cup X_n = 2) \\ &= v_{n-1} - v_n \end{aligned}$$

   b) Pour tout entier n on a : $v_n = \mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

Conclusion : $\boxed{\text{Et donc } T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ et } E(T) = 3}$
(en moyenne, au bout de trois prélèvements, la population devient homogène.)

c) On se souvient que $T(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
D'où

$$\mathbb{P}(T = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0$$

d) Pour simuler la variable aléatoire T, il suffit de modéliser successivement des lois binomiales de paramètres N qui est fixe et $\dfrac{k}{N}$ qui dépend du nombre de bactéries de type A dans le prélèvement précédent.
On commencera donc par modéliser une loi binomiale qui modélise à chaque prélèvement le nombre de bactéries de type A obtenues.

Voici un exemple de rédaction :

```python
def simulBinomiale(n, p):
    return sum([int(rdm.random()<p) for _ in range(n)])

def simulT(k0, N):
    T = 1
    k = simulBinomiale(N, k0/N)
    while 1 <= k <= N-1:
        T += 1
        k = simulBinomiale(N, k/N)
    return T
```

On trouve dans ce cas : `np.mean([simulT(1, 3) for _ in range(1000)])` qui renvoie 3 à 10^{-3} près, ce qui est conforme au résultat annoncé en 7.b)

Partie 2

Dans cette partie, $N \geq 2$ est quelconque et $k_0 \in [\![1, N-1]\!]$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = N)$ et $v_n = 1 - u_n$.

① Distinguons le cas $n = 0$ et le cas $n \geq 1$:

— <u>si $n = 0$</u> : D'après l'énoncé

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \binom{N}{i}\left(\frac{k_0}{N}\right)^i\left(1 - \frac{k_0}{N}\right)^{N-i} = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}$$

puisque, $\mathbb{P}(X_0 = k) = 0$ si $k \neq k_0$ et $\mathbb{P}(X_0 = k_0) = 1$

— <u>si $n \geq 1$</u> : On raisonne à nouveau à l'aide de la formule des probabilités totales en considérant le système complet d'événements : $\{(X_n = k), k \in [\![0, N]\!]\}$. Alors pour tout $i \in [\![0, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}_{(X_n = k)}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = k)$$

Soit, par hypothèse :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall i\in[\![0,N]\!],\ \mathbb{P}(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}}$

② *Montrons que pour tout entier n, $\mathbb{E}(X_{n+1})=\mathbb{E}(X_n)$:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1})&=\sum_{i=0}^{N}i\mathbb{P}(X_{n+1}=i)\\&=\sum_{i=1}^{N}i\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\quad\text{par interversion des sommes}\\&=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\sum_{i=1}^{N}i\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\\&=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)N\frac{k}{N}\sum_{i=1}^{N}\binom{N-1}{i-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{i-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\quad\text{car } i\binom{N}{i}=N\binom{N-1}{i-1}\\&=\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X_n=k)\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^j\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-1-j}\quad\text{en posant } j=i-1\\&=\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X_n=k)\left(\frac{k}{N}+1-\frac{k}{N}\right)^{N-1}=\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X_n=k)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}=\mathbb{E}(X_n)}$

③ a) *Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(X_{n+1}(N-X_{n+1})\right)=\dfrac{N-1}{N}\mathbb{E}(X_n(N-X_n))$:* On reconnait une application du théorème de transfert où $u(X_{n+1})=X_{n+1}(N-X_{n+1})$... Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}(N-X_{n+1}))&=\sum_{i=0}^{N}i(N-i)\mathbb{P}(X_{n+1}=i)\\&=\sum_{i=0}^{N}i(N-i)\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\quad\text{nul pour } i=0 \text{ et } i=N\\&=\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\sum_{i=1}^{N-1}i(N-i)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}i(N-i)\binom{N}{i}&=N(N-i)\binom{N-1}{i-1}=N(N-i)\frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-i)!}=N\frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-i-1)!}\\&=N(N-1)\frac{(N-2)!}{(i-1)!(N-1-i)!}=N(N-1)\binom{N-2}{i-1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}(N-X_{n+1})) &= \sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)N(N-1)\sum_{i=1}^{N-1}\binom{N-2}{i-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{i-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i-1}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)N(N-1)\sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^{j}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-2-j}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=k)k(N-k)\frac{N-1}{N}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}(N-X_{n+1})\right) = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(X_n(N-X_n))}$

b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n(N-X_n))$ en fonction de n, N et k_0 : C'est immédiat car si on pose $w_n = \mathbb{E}\left(X_n(N-X_n)\right)$ on vient de montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $E(X_0(N-X_0)) = k_0(N-k_0)$ (car var certaine)

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n(N-X_n)) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n k_0(N-k_0)}$

④ *Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente :* Inutile ici de faire des calculs. Il suffit de noter que

$$((X_n=0)\cup(X_n=N)) \subset ((X_{n+1}=0)\cup(X_{n+1}=N))$$

puisque si la population devient homogène, alors elle le restera nécessairement.
Dès lors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$: La suite (u_n) est croissante. Par ailleurs elle est majorée par 1 par définition d'une probabilité. On a donc par application du théorème de la limite monotone :
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

⑤ a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ prenant un nombre fini de valeurs. L'inégalité de Markov assure que :

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

b) *Etudions sur $[1, N-1]$ la fonction f définie par : $\forall x \in [1, N-1],\ f(x) = x(N-x)$:*
Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme, donc continue et dérivable sur $[1, N-1]$ et

$$\forall x \in [1, N-1],\ f'(x) = N - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{N}{2}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	1		$\frac{N}{2}$		$N-1$
$f'(x)$	$N-2$	$+$	0	$-$	$2-N$
$f(x)$	$N-1$	$\nearrow$	$N^2/4$	$\searrow$	$N-1$

c) *En utilisant $\mathbb{E}(X_n(N-X_n))$, montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.*

Si on se laisse porter par l'énoncé, on pense à utiliser l'inégalité de Markov mais appliqué à la var

$Y = X_n(N - X_n)$ qui prend des valeurs positives puisque $X_n(\Omega) = [\![0, N]\!]$.
On commence par noter que : $Y = X_n(N - X_n) \geq N - 1 \Leftrightarrow f(X_n) \geq N - 1 \Leftrightarrow 1 \leq X_n \leq N - 1$ d'après l'étude de f.
Dès lors, en prenant $a = N - 1$, on obtient grâce à l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X_n(N - X_n) \geq N - 1) = \mathbb{P}(1 \leq X_n \leq N - 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n(N - X_n))}{N - 1}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la question 3.b) en notant que

$$v_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(1 \leq X_n \leq N - 1) = \mathbb{P}(X_n(N - X_n) \geq N - 1)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}$

⑥ a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? On a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = 0$ car $0 < 1 - \frac{1}{N} < 1$
donc par application du théorème d'encadrement des limites, on a :
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0}$

b) En déduire que pour tout entier $k \in [\![1, N - 1]\!]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0$:
On a $v_n = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}(X_n = k)$ avec $\mathbb{P}(X_n = k) \geq 0$, $\forall k \in [\![1, N - 1]\!]$.
Donc,

$$0 \leq \mathbb{P}(X_n = k) \leq v_n,\ \forall k \in [\![1, N - 1]\!]$$

Par théorème d'encadrement des limites, on a :
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0}$

Interprétation : La population devient de plus en plus homogène au fil du temps...

c) *En utilisant la question 2., montrons que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = N) = p$:
On se souvient que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à $\mathbb{E}(X_0) = k_0$ (puisque X_0 var certaine égale à k_0).
D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) + \cdots + (N - 1)\mathbb{P}(X_n = N - 1) + N\mathbb{P}(X_n = N) = k_0$$

par passage à la limite, en utilisant que $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ si $1 \leq k \leq N - 1$, on a :

$$N \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = N) = k_0 \text{ ou encore } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = N) = \frac{k_0}{N}$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = N) = p}$

Et en utilisant que $\{(X_n = k), 0 \leq k \leq N\}$ est un système complet d'événement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) = 1 - p = q$$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p = q}$

d) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge vers une loi de probabilité qu'on déterminera.