

## Devoir maison 7 : Valeurs propres et analyse

D'après l'épreuve B, Agro-véto, de 2020.

### 1 Modélisation et commande du processus

Rappelons le système différentiel satisfait par  $(T_1, T_2)$  :

$$\begin{cases} m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) + h_2 S_2 (T_\infty - T_2) + u \end{cases} \quad (E)$$

**Lu dans le rapport de jury :** « Le jury note un réel effort des candidats concernant la rédaction (clarté, propreté). On pourra cependant noter que certains problèmes pourraient être résolus avec plus de concision (notamment la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ne devrait pas s'étaler sur deux pages).

De manière générale, peu de candidats se basent sur l'intuition physique découlant du contexte pour répondre aux questions, notamment les questions d'interprétation. Ainsi, des erreurs pourraient être évitées comme quand des candidats trouvent des puissances de chauffage négatives ou des températures constantes alors qu'on se trouve clairement dans une situation où la température change. »

#### 1.1 Commande en boucle ouvert (cas $u$ constant)

① On note  $x_1 = T_1 - T_\infty$  et  $x_2 = T_2 - T_\infty$ . Alors

$$\begin{aligned} m_1 C_1 \frac{dx_1}{dt} &= m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} \\ &= h_1 S_1 (T_2 - T_1), \text{ en utilisant (E)} \\ &= h_1 S_1 (T_2 - T_\infty + T_\infty - T_1) \\ &= h_1 S_1 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

De même nous obtenons pour  $x_2$  :

$$\begin{aligned} m_2 C_2 \frac{dx_2}{dt} &= m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} \\ &= h_1 S_1 (T_1 - T_2) - h_2 S_2 x_2 + u, \text{ en utilisant (E)} \\ &= h_1 S_1 (x_1 - x_2) - h_2 S_2 x_2 + u. \end{aligned}$$

En résumé, nous avons obtenu :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (x_2 - x_1) = f_1(x_1, x_2, u), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} (x_1 - x_2) - \frac{h_2 S_2}{m_2 C_2} x_2 + \frac{1}{m_2 C_2} u = f_2(x_1, x_2, u). \end{cases}$$

On obtient alors que  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  vérifie le système différentiel suivant (la dérivée étant comprise ligne par ligne) :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad (1)$$

avec  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$ ,  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{2,2}\mathbb{R}$ ,  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $u \in \mathbb{R}$  constant.

② a) On résout simplement le système associé. En effet,  $x$  vérifie  $Ax + bu = 0$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 + 0 & = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 9u & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = x_2, \\ 2x_1 & = 9u. \end{cases}$$

En particulier,  $x_1 = x_2$ .

b) On peut proposer une interprétation algébrique, en l'occurrence, l'ensemble des solutions  $x \in \mathbb{R}^2$  du système avec second membre  $Ax = -bu$  est inclus dans  $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Par rapport aux solutions  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , on peut dire que s'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\frac{dx}{dt}(t_0) = 0$ , alors  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ . Donc les temps d'annulation de la dérivée de  $x$  ne peuvent être que des temps où la température de l'eau est égale à celle des petits pois.

**Lu dans le rapport de jury :** « Le symbole  $\Leftrightarrow$  souvent mal utilisé et de nombreux étudiants confondent une équivalence et une implication, voire intervertissent le sens d'une implication. »

c) Calculons la valeur de  $u$  si on considère que  $x_1 = x_2 = 72$ .

D'après la seconde ligne du système, si  $x_1 = x_2 = 72$ , alors  $u = \frac{2}{9}x_1 = \frac{2}{9}72$ , soit  $u = 16 \text{ W}$ .

③ a)  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $A - \lambda I_2$  n'est pas inversible, ou encore si, et seulement si,  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 5 \\ 4 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 10$ .

Le discriminant associé est alors  $\Delta = 81 = 9^2$ , donc les deux racines sont :

$$\frac{-11 + 9}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{-11 - 9}{2} = -10.$$

Donc  $\text{Sp}(A) = \{-10, -1\}$ .

b) La matrice  $A$  est de format  $2 \times 2$ , et possède deux valeurs propres distinctes.

**Conclusion :**  $A$  est diagonalisable (sur  $\mathbb{R}$ ).

**Lu dans le rapport de jury :** « Le jury constate à nouveau de très nombreuses difficultés sur la diagonalisation. La justification de la diagonalisabilité est souvent mal comprise et beaucoup de candidats confondent les notions et utilisent le rang de  $M$ , la « dimension de  $M$  », la dimension de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  voire l'inversibilité de  $M$  pour justifier la diagonalisabilité. De plus, le calcul des vecteurs propres est souvent problématique, on constate des erreurs

dans la construction de la matrice de passage (inversion des colonnes) et des difficultés pour calculer son inverse. »

c) Commençons par calculer les éléments de  $E_{-10}(A)$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$ ,

$$(A + 10I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$$

$$\text{Conclusion : } E_{-10}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Faisons de même pour l'autre...

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}\mathbb{R}$ ,

$$(A + I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 5y = 0 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x = 5y$$

$$\text{Conclusion : } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Notons  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4/5 & -1 \end{pmatrix}$ , alors  $P$  est inversible d'inverse  $P^{-1} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4/5 & -1 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule de changement de base, et puisque  $A$  est diagonalisable, nous avons

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec } D = \text{Diag}(-1, -10).$$

④ Soit  $x$  une solution de (1). On définit  $z = P^{-1}x$ , où  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ .

a) Notons  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ . Alors  $z = P^{-1}x = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4/5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \frac{4}{5}x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ .

Donc, d'après les règles d'opérations sur les dérivées des fonctions à valeurs réelles, nous avons :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} x'_1 + x'_2 \\ \frac{4}{5}x'_1 - x'_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \frac{dx}{dt}$$

**Lu dans le rapport de jury :** « on voit souvent des raisonnements de la forme  $\frac{dx}{dt} = Mx$

donc  $\frac{dx_1}{dt} = Mx_1$  ; il est pourtant aisé de constater que cette seconde égalité n'a aucun sens en regardant les objets en jeu »

b) Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= P^{-1} \frac{dx}{dt} \\ &= P^{-1} (PDP^{-1}x + bu) \\ &= DP^{-1}x + P^{-1}bu \\ &= Dz + \beta u, \quad \text{en posant } \beta = P^{-1}b. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ED vérifiée par } x \\ \text{définition de } z \end{array}$$

- c) On suppose que  $T_1(0) = 20^\circ\text{C}$  et  $T_2(0) = 92^\circ\text{C}$ .  
Alors  $x_1(0) = 20 - T_\infty = 0$  et  $x_2(0) = 92 - T_\infty = 72$  et

$$z(0) = P^{-1}x(0) = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4/5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 72 \\ -72 \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- d) Calculons pour commencer le vecteur  $\beta$ . Le vecteur  $b$  étant fourni par l'énoncé,

$$\beta = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4/5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'équation (2) est équivalente à la suivante :  $\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 16$ ,  
soit

$$\begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) + 5 \times 16 \\ z_2'(t) = -10z_2(t) - 5 \times 16 \\ \begin{cases} z_1(t) = Ke^{-t} + 5 \times 16 \\ z_2(t) = K'e^{-10t} - 8 \end{cases}, \quad K, K' \in \mathbf{R} \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales  $z_1(0) = -40, z_2(0) = 40$ , on obtient comme conditions

$$K = 40 - 5 \times 16 = 40 - 80 = -40, \quad K' = 8 - 40 = -32$$

d'où finalement, pour tout  $t \in \mathbf{R}^+$  :

$$z_1(t) = -40e^{-t} + 5 \times 16, \quad z_2(t) = -32e^{-10t} - 8$$

- e) En utilisant la relation  $x = Pz$ , on obtient pour tout  $t \in \mathbf{R}^+$  :

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ x_2(t) = \frac{4}{5}z_1(t) - z_2(t). \end{cases}$$

Après calculs, on trouve bien le système de l'énoncé :

$$\begin{cases} x_1(t) = 72 - 40e^{-t} - 32e^{-10t} \\ x_2(t) = 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t} \end{cases}$$

- ⑤ a) Soit  $t \in \mathbf{R}^+$ . Alors la fonction  $x_2$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^+$  en tant que somme de telles fonctions.

$$x_2'(t) = 32e^{-t} - 320e^{-10t}.$$

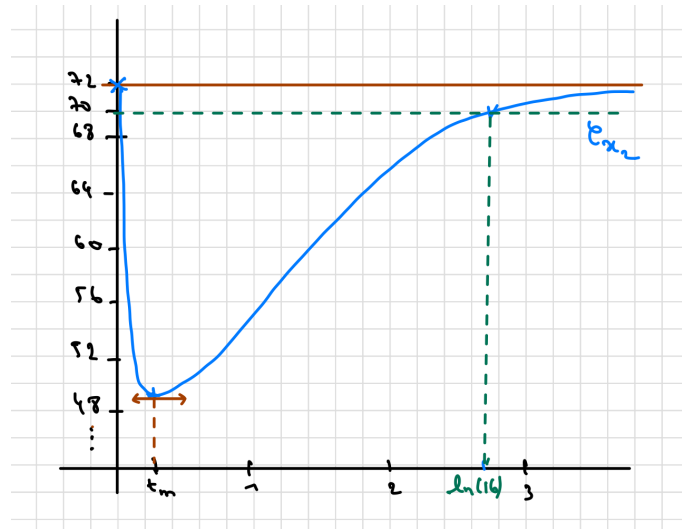
Dès lors, nous avons

$$\begin{aligned} x_2'(t) \geq 0 &\iff 32e^{-t} \geq 320e^{-10t} \\ &\iff -t \geq \ln 10 - 10t \\ &\iff 9t \geq \ln 10 \\ &\iff t \geq \frac{\ln 10}{9} (\geq 0). \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations cidessous, puis la courbe représentative de la fonction.

$t$	0	$\frac{\ln(10)}{9}$	$+\infty$
$x_2'(t)$	-	0	+
$x_2(t)$	72	$x_2\left(\frac{\ln(10)}{9}\right)$	72

La dérivée s'annule en  $t_m = \frac{\ln 10}{9} \approx 0.26$ , nous avons une pente horizontale en ce point.



**Lu dans le rapport de jury :** « Le jury est stupéfait du nombre d'erreurs intervenant dans l'étude d'une fonction simple (question 5a) : erreurs sur les variations (notamment résoudre dérivée = 0 au lieu de dérivée > 0), erreurs manifestes sur la représentation graphique (allure aberrante, courbe avec un pic, valeur incorrecte pour  $t = 0$  ou pour la limite en l'infini, tangente horizontale à  $t = 0$ ...), pas d'indication de l'asymptote ou de la tangente horizontales... Il est assez préoccupant de constater que de nombreux étudiants ne sont pas capables de réaliser cette question parfaitement, alors qu'elle ne dépasse pas le niveau de Terminale Scientifique et qu'un usage raisonné de la calculatrice permet d'éviter de nombreuses erreurs. »

- b) Le processus commence avec une eau très chaude (  $92^\circ\text{C}$  ), on démarre ensuite la chauffe qui au début ne parvient pas à compenser la chute de température due à la déperdition d'énergie. Dans un troisième temps, la température de l'eau augmente, conséquence du démarrage de la chauffe.

c)

$$t_R = \min \{t \geq 0; \forall t' \geq t, T_2(t') \geq 90\} = \min \{t \geq 0; \forall t' \geq t, x_2(t') \geq 70\}.$$

C'est donc le plus petit temps à partir duquel la courbe de  $x_2$ , croissante, reste au-dessus de la droite  $y = 70$ . Ainsi, après ce temps, la courbe de chauffe  $x_2$  respecte le cahier des charges imposé par l'industriel.

- d) Nous avons  $x_2(\ln(16)) = 72 - \frac{32}{16} + \frac{32}{16^{10}} = 70 + \frac{32}{16^{10}} \approx 70$ . Donc  $\ln(16)$  est une bonne approximation de  $t_R$ . Les valeurs propres sont les coefficients dans les exponentielles décroissantes.

Plus les valeurs propres seront négatives, plus  $x_2$  convergera vite vers 72, donc plus  $t_R$  sera petit.

## 1.2 Commande en boucle fermée (cas $u$ variable)

- ① Avec ce choix de chauffage, lorsque  $x_2$  baisse alors  $u$  augmente. Ainsi, ce système aura tendance à réguler la température de l'eau en l'augmentant/diminuant lorsque cela est nécessaire.
- ② Si  $k = 0$ , alors  $u$  est constant et on tombe dans le cadre des questions précédentes. Ainsi :  $t_R \approx \ln(16)$ .

- ③ On définit  $w(t) = x(t) - \begin{pmatrix} 72 \\ 72 \end{pmatrix}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Constatons que  $c^T \cdot w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 72 \\ x_2 - 72 \end{pmatrix} = x_2 - 72$ .

On en déduit alors la dérivée de  $w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ &= Ax + bu \\ &= A \left( w + 72 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + b(16 + k(72 - x_2)) \\ &= A \left( w + 72 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + b(16 - kc^T \cdot w) \\ &= (A - kbc^T) w + 72 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 16b \end{aligned}$$

Après calculs, on trouve que  $72 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 16b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où la formule de l'énoncé :

$$\frac{dw}{dt} = (A - kbc^T) w$$

- ④ On note  $\lambda_1(k)$  et  $\lambda_2(k)$  les valeurs propres de  $A - kbc^T$  telles que  $\lambda_1(k) < \lambda_2(k)$ .

a) Calculons les deux valeurs propres à l'aide du déterminant. Nous avons

$$A - kbc^T = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ , alors calculons

$$D(\lambda) \stackrel{(\text{déf.})}{=} \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 5 \\ 4 & -6 - 9k - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-6 - 9k - \lambda) - 20.$$

En développant, on obtient :

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(9k + 11) + 5(9k + 2)$$

Le discriminant de ce polynôme en  $\lambda$  est alors  $(9k + 11)^2 - 20(9k + 2) = 9(9k^2 + 2k + 9) \geq 0$  puisque  $k \geq 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \text{Spec}(A - kb^T c) \\ &= \left\{ \frac{-9k - 11 - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}, \frac{-9k - 11 + 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2} \right\} \end{aligned}$$

On note alors  $\lambda_1(k) = \frac{-9k-11-3\sqrt{9k^2+2k+9}}{2}$  et  $\lambda_2(k) = \frac{-9k-11+3\sqrt{9k^2+2k+9}}{2}$ .

- b) La fonction  $\lambda_1$  est une somme de fonctions décroissantes, donc  $\lambda_1$  est décroissante. Pour  $\lambda_2$ , nous voilà condamnés à faire les calculs à la main en calculant la dérivée. Soit  $k \in \mathbf{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_2'(k) &= \frac{1}{2} \left( -9 + \frac{3}{2} \frac{18k + 2}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -9 + 3 \frac{9k + 1}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} \right) \\ &= \frac{1 - 9\sqrt{9k^2 + 2k + 9} + 3(9k + 1)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \lambda_2'(k) &\leq 0 \\ &\iff 3(9k + 1) \leq 9\sqrt{9k^2 + 2k + 9} \\ &\iff (9k + 1)^2 \leq 3^2(9k^2 + 2k + 9) \quad \text{quantités positives car } k \geq 0 \\ &\iff 81k^2 + 18k + 1 \leq 81k^2 + 18k + 81 \\ &\iff 1 \leq 81 \end{aligned}$$

Ainsi la fonction  $\lambda_2$  est négative sur  $\mathbf{R}^+$ , d'où la décroissance de  $\lambda_2$  sur  $\mathbf{R}^+$ .

- ⑤ Plus  $k$  est grand, plus les valeurs propres de  $A - kbc^T$  seront petites dans les négatifs, donc plus le temps  $t_R$  sera petit d'après la question 5.d. En revanche, si l'on augmente trop la valeur de  $k$ , on augmente l'énergie à fournir pour la chauffe.

## 2 Étude informatique des commandes

### 2.1 Recherche du minimum d'une fonction

- ① Soit  $f : t \in \mathbf{R} \mapsto 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t}$ .

On demande d'écrire une fonction d'en-tête  $f(t)$  prenant en entrée  $t$  (un réel) et qui renvoie la valeur de  $f(t)$ . Par exemple :

```
1 import numpy as np
2 def f(t) :
3     return 72-32*np.exp(-t)+32*np.exp(-10*t)
```

Une déclaration alternative serait simplement

```
1 f = lambda t:72 - np.exp(-t) + 32*np.exp(-10*t)
```

② Après les lignes 2 et 5, la variable  $Lt1$  contient les éléments d'une subdivision régulière en  $N$  points de l'intervalle  $[0, 5]$  de longueur respective  $5/(N - 1)$ .  
La variable  $Ly1$  contient les images par  $f$  de cette subdivision.

③ Il suffit alors d'effectuer une recherche de minimum sur les éléments de la liste  $ey1$ .

```

1 def minimum_f(N):
2     Lt1 = np.linspace(0, 5, N)
3     Ly1 = []
4     for k in range(0, N):
5         Ly1.append(f(Lt1[k]))
6     # Recherche de minimum
7     mini = Ly1[0]
8     ind_mini = 0
9     for i in range(1, N):
10        if Ly1[i] < mini:
11            mini = Ly1[i]
12            ind_mini = i
13    return [mini, Lt1[ind_mini]]

```

Plus précisément, la deuxième coordonnée du résultat sera la dernière valeur où le minimum est atteint. Testons par exemple avec un jeu de valeurs donné par l'énoncé : pour  $N_1 = 20$ ,  $\text{minimum\_f}(20)$  retourne bien  $[49.70701495513559, 0.2631578947368421]$ .

**Lu dans le rapport de jury :** « Le jury constate que la partie informatique a été globalement bien réussie cette année et que seuls quelques rares candidats ont choisi de ne pas l'aborder.

- a) Comme tous les ans, une phrase d'explication était demandée avant les codes, mais de trop nombreux étudiants l'ont omis.
- b) On constate une confusion entre l'indice d'un élément dans une liste et cet élément.
- c) Un bon nombre de candidats bute sur la recherche du minimum d'une liste. L'erreur la plus fréquente est la confusion avec le tri d'une liste, qui amène à comparer les éléments successifs et non pas chaque élément avec le minimum.
- »

④ a)  $N_2$  est bien supérieur à  $N_1$ . L'algorithme de calcul d'une valeur approchée du minimum risque d'être plus précis en utilisant  $N_2$ . La différence provient donc d'une différence dans les précisions choisies (dans le calcul de la subdivision de  $[0,5]$ ).

b) Logiquement (mais encore faudrait-il le montrer), la valeur  $t_{m_2}$  associée à  $N_2$  devrait être meilleure que  $t_{m_1}$ .

⑤ L'algorithme cherche à approcher  $t^* = \frac{\ln 10}{9} \approx 0.2558$ . Nous avons obtenu  $m_2 \leq m_1 \leq m_3$  et  $t_{m_2} \leq t^* \leq t_{m_1} \leq t_{m_3}$ . Il n'est donc pas clair que la suite des erreurs commises  $(|t_{m_N} - t^*|)_N$  est décroissante en  $N$  (la valeur obtenue pour  $N = 50$  semble moins précise que celle pour  $N = 20$ ), néanmoins cette suite semble converger vers zéro lorsque  $N \rightarrow \infty$  d'après le résultat de l'appel associé à  $N = 20000$ .

## 2.2 Recherche du point d'annulation d'une fonction

Pour une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  donnée, avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on s'intéresse à la résolution approchée de l'équation  $F(x) = 0$ .

On suppose que  $F$  s'annule en un point appelé  $x^* \in I$  et que  $F$  soit suffisamment régulière pour que les calculs suivants soient bien définis.

L'objectif est d'obtenir une valeur approchée de  $x^*$ .

①

```
1 def Newt(F, G, u0, e):
2     u = u0
3     while np.abs(F(u)) >= e:
4         u = u - F(u)/G(u)
5     return u
```

Par exemple, si l'on considère  $F(x) = x^2 - 2$  et  $G(x) = 2x$  pour  $x \in I = \mathbf{R}^+$ , alors l'algorithme devrait retourner une valeur approchée de  $\sqrt{2}$ .

```
1 def F(x):
2     return x**2 - 2
3 def G(x):
4     return 2*x
```

L'appel `Newt(F, G, 1, 10**(-4))` retourne 1.4142156862745099.

C'est une bonne approximation de  $\sqrt{2}$ .

- ② Tester l'égalité à zéro d'un flottant n'est absolument pas pertinent. On remplace donc cette condition d'arrêt par une majoration par une quantité très petite. Plus celle-ci est petite, meilleure sera l'approximation de  $x$  vérifiant  $F(x) = 0$ . On choisira donc plutôt  $e_3 = 10^{-8}$ .
- ③ Cela n'est pas pertinent car ce sont des valeurs approchées qui sont calculées à chaque étape de l'algorithme et rien n'assure que la valeur exacte sera obtenue, ne serait-ce qu'à cause de la gestion des flottants sur Python.
- ④ Si un tel  $n_0$  n'existe pas, alors la structure `while` ne s'arrêtera pas. On pourrait donc ajouter une borne sur le nombre d'itérations, c'est ce qui est fait dans la suite.
- ⑤ On souhaite modifier la fonction `Newt` de manière à fixer un nombre maximal d'itérations pour la boucle `while`. Il suffit alors d'ajouter une seconde condition d'arrêt.

```
1 def NewtS(F, G, u0, e, nder):
2     '''
3     retourne le terme de la suite de Newton à précision e
4     - avec borne sur le nombre d'itérations
5     '''
6     u = u0
7     n = 0 # on ajoute un compteur d'itérations
8     while np.abs(F(u)) >= e and n <= nder:
9         n += 1
10        u = u - F(u)/G(u)
11    if n <= nder:
```

```

12         return u
13     else:
14         return False

```

Reprenons l'exemple de  $\sqrt{2}$  mentionné ci-dessus.

L'appel `NewtonS (F, G, 1, 10 * *(-4), 10)` retourne 1.4142156862745099.

- ⑥ D'après le tableau de variations établi pour  $x_2$ , le temps  $t_R$  peut être définie comme le temps  $t \geq t^* = \frac{\ln 10}{9}$  pour lequel  $x_2(t) = 70$ .

Notons  $F \left| \begin{array}{l} [t^*, \infty] \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \longrightarrow x_2(t) - 70 \end{array} \right.$ .

☞ La méthode de Newton appliquée à la fonction  $F$  permettrait d'obtenir une valeur approchée de  $t_R$ .

Il faudrait cependant veiller à l'initialisation pour garantir la convergence vers  $t_R$  et pas vers l'autre solution.

- ⑦ Constatons tout d'abord que pour tout  $t \in \mathbf{R}^+$ ,

$$\frac{dF_1}{dt}(t) = f'(t) = G_1(t)$$

où  $F_1, G_1$  sont les deux fonctions mathématiques associées aux fonctions Python `F_1` et `G_1`.

Les appels retournent donc, sous réserve de convergence, une valeur approchée d'une solution de l'équation  $x_2(t) = 70$ .

Pour le premier appel, vu le résultat, on constate que c'est une valeur approchée de  $t_R$  qui est retournée. En revanche, pour le second, c'est la solution sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\ln 10}{9}\right]$ .

La différence observée est due à l'initialisation.