

DEVOIR MAISON N° 6 : TD11 Var à densité

Exercice 7 :

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- ①
- a. Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
 - b. En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n .
 - c. En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

- ② On note F_n la fonction de répartition de Y_n .
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n .

- ③ a. Montrer que pour tout réel $u \in [0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu$$

- b. En déduire que l'intégrale $\int_0^\infty (1 - F_n(x))dx$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

- ④ a. Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A))$$

- b. En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$$

- ⑤ A l'aide du changement de variables $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt$$

En déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n$$

(D'après oral Agro-véto 2019)