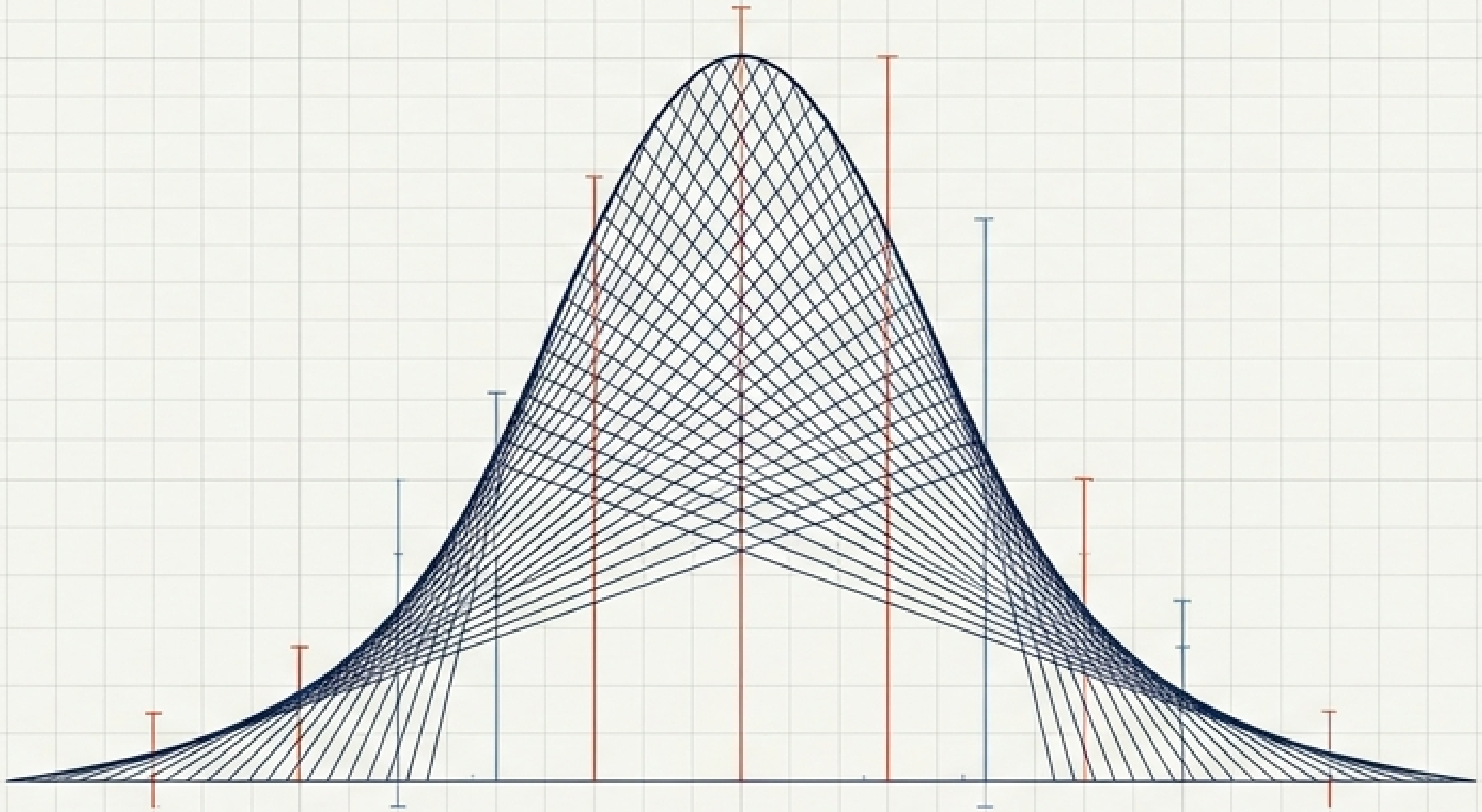
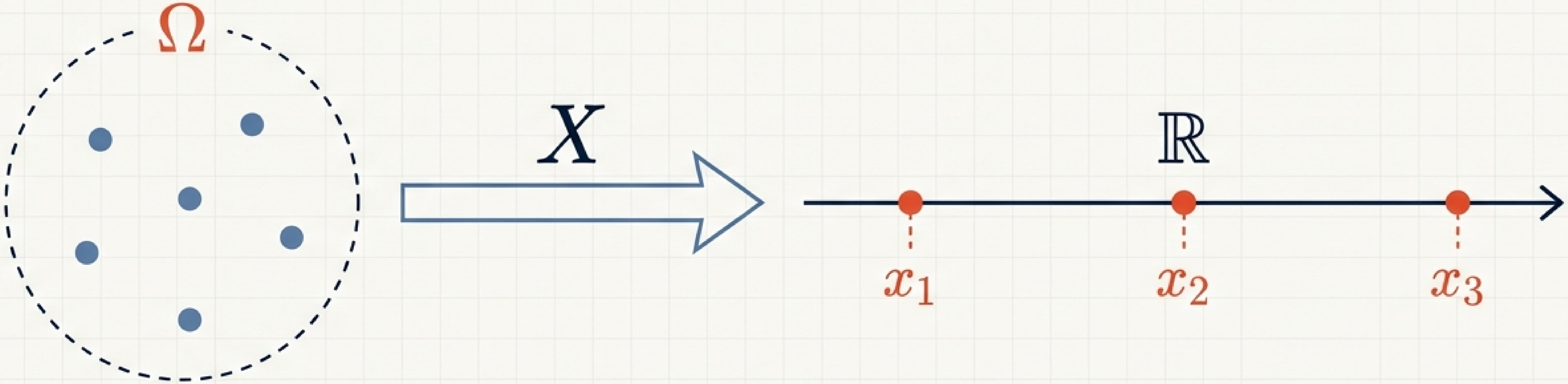


Le Plan de l'Aléatoire

Architecture et Modélisation des Variables Aléatoires Discrètes

Les Fondations : La Variable Aléatoire Discrète

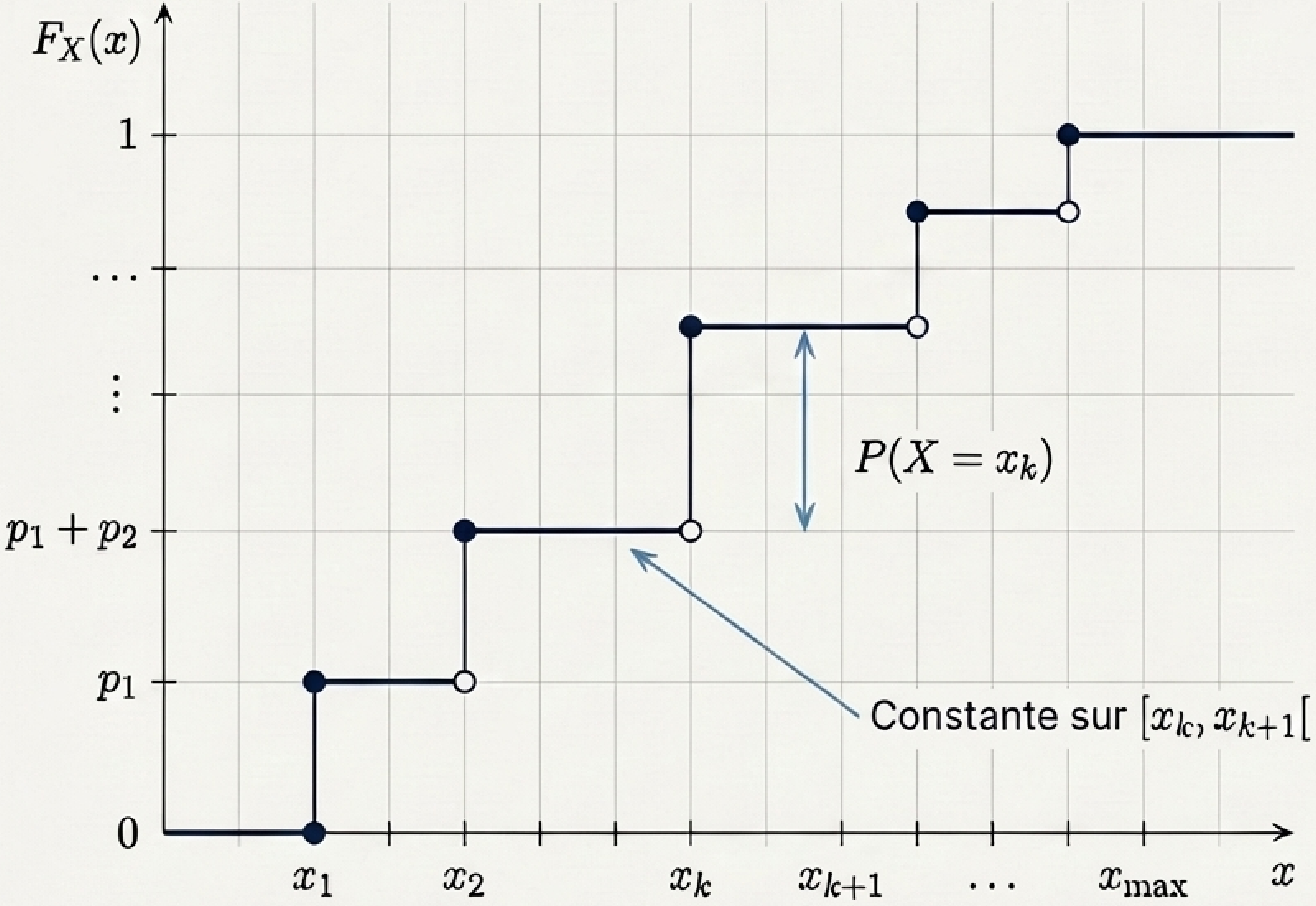


Une variable aléatoire réelle discrète X projette un univers probabilisé Ω vers un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité : $p_k = P(X = x_k)$

La Règle d'Or (Système Complet) : $\sum_k p_k = 1$

La Fonction de Répartition (F_X)



Définition :

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

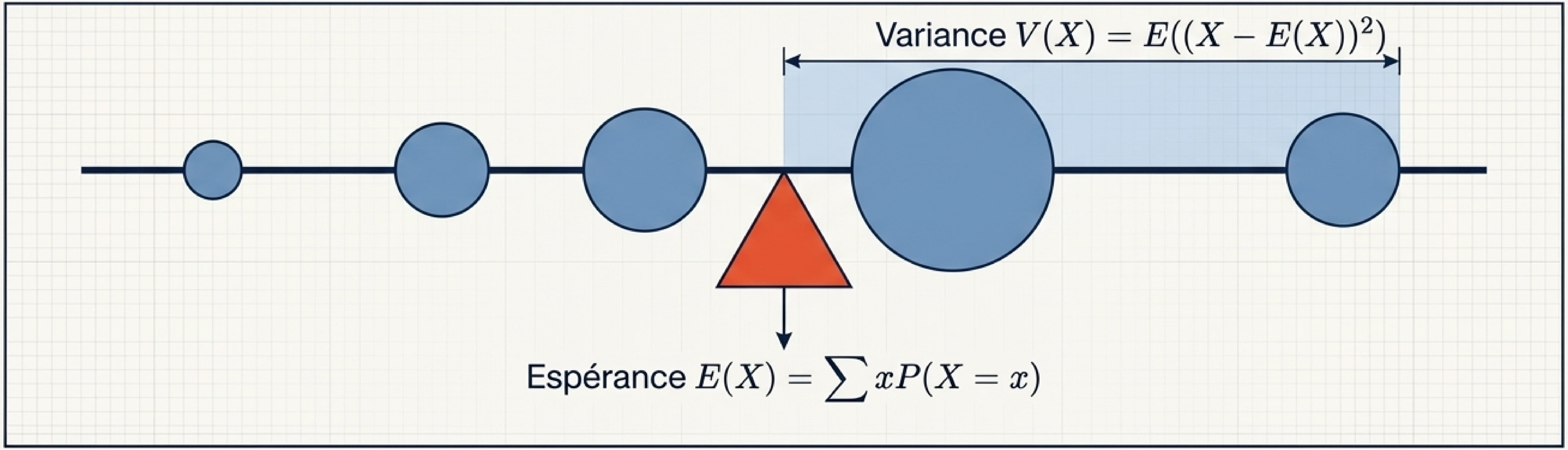
Propriétés :

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

Calcul :

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

Espérance et Variance : Le Centre et la Dispersion



Formule de Koënig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

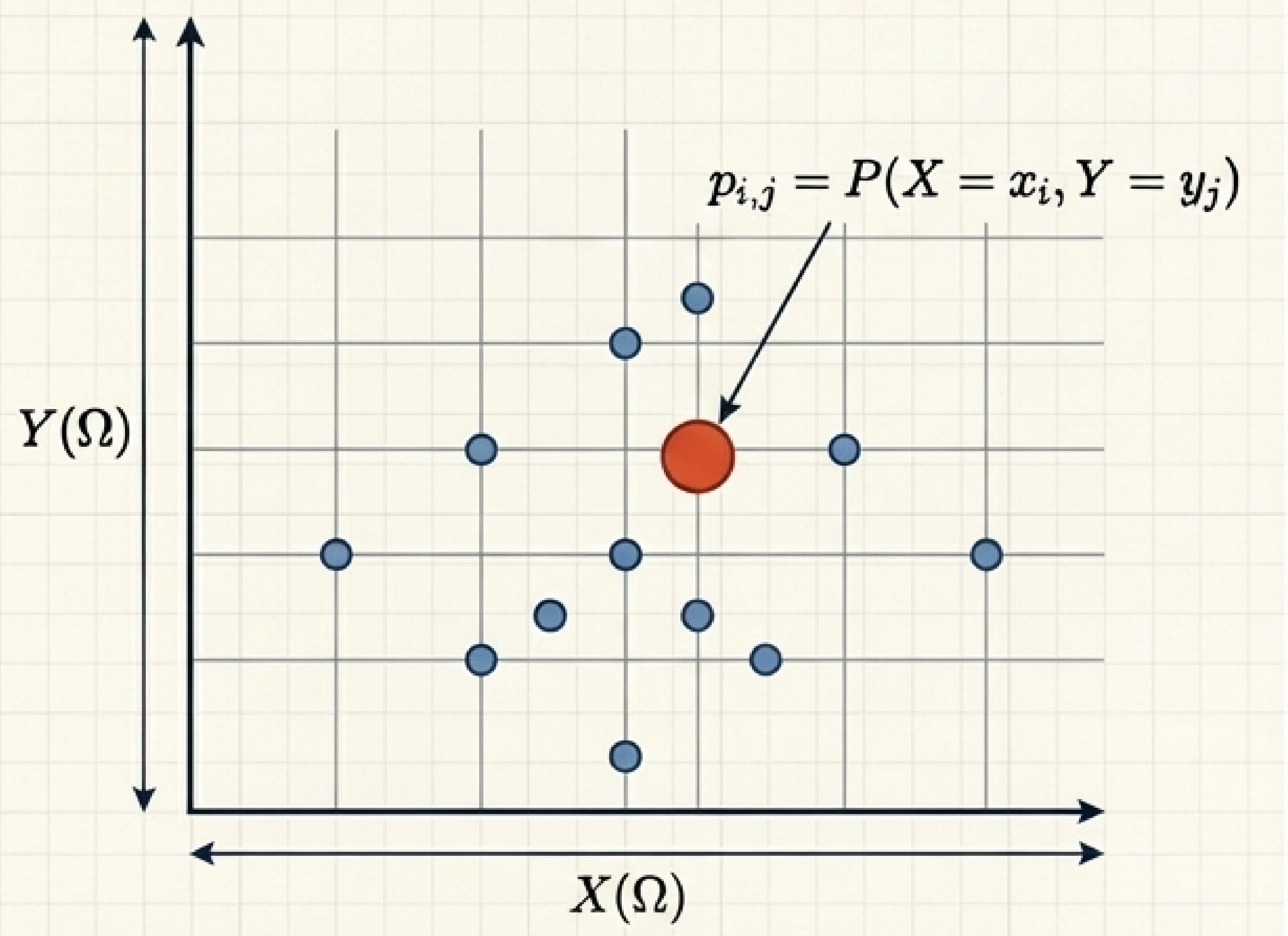
Inégalité de Markov

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda} \text{ (Pour } X \geq 0, \lambda > 0)$$

Matrice Diagnostique : Les Lois Usuelles Discrètes

Loi & Notation	Modèle / Usage	Support $X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
LE CAS FINI					
Uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	Tirage équiprobable	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	Succès ou Échec unique	$\{0,1\}$	p (si $k=1$)	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	n épreuves de Bernoulli indép.	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
LE CAS INFINI					
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	Événements rares, files d'attente	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	Rang du 1er succès	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Le Système : Lois Conjointes (Couples de V.A.R.D.)



Définition : Un couple (X, Y) étudie deux variables simultanément sur le même univers Ω.

Loi du Couple : $P(X = x, Y = y)$

La Double Somme :

$$\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

Insight : La **loi conjointe** contient toute **l'information du système.**
Les **lois individuelles** n'en sont que des **projections.**

Lois Marginales (La Projection)

$P(X=x_1, Y=y_1)$	$P(X=x_1, Y=y_2)$	$P(X=x_1, Y=y_3)$	
$P(X=x_2, Y=y_1)$	$P(X=x_2, Y=y_2)$	$P(X=x_2, Y=y_3)$	
$P(X=x_3, Y=y_1)$	$P(X=x_3, Y=y_2)$	$P(X=x_3, Y=y_3)$	

Sommation sur les colonnes pour obtenir P(X=x)

Sommation sur les lignes pour obtenir P(Y=y)

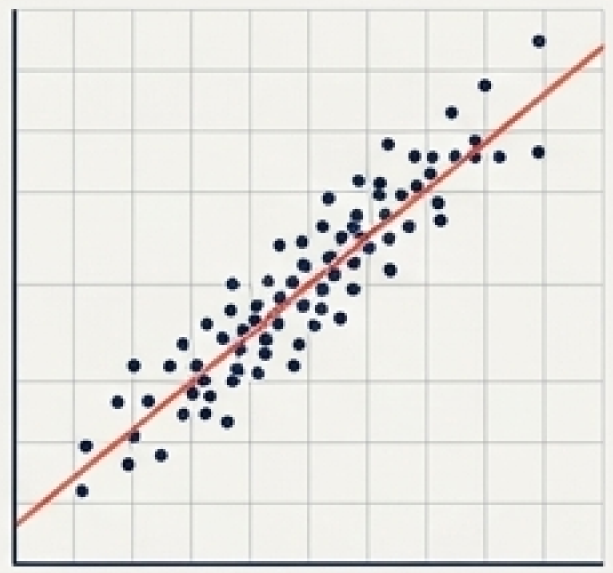
$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

Lois Conditionnelles (L'Isolement)

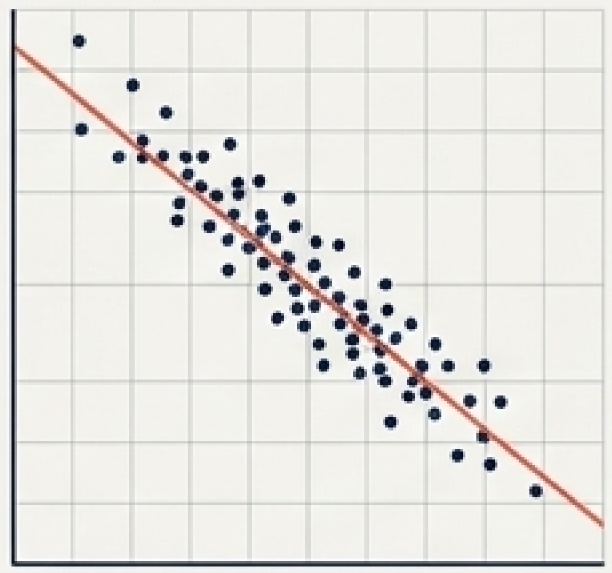
$P(X=x_1, Y=y_1)$	$P(X=x_2, Y=y_2)$	$P(X=x_3, Y=y_3)$	

$$P_{(x=x)}(Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

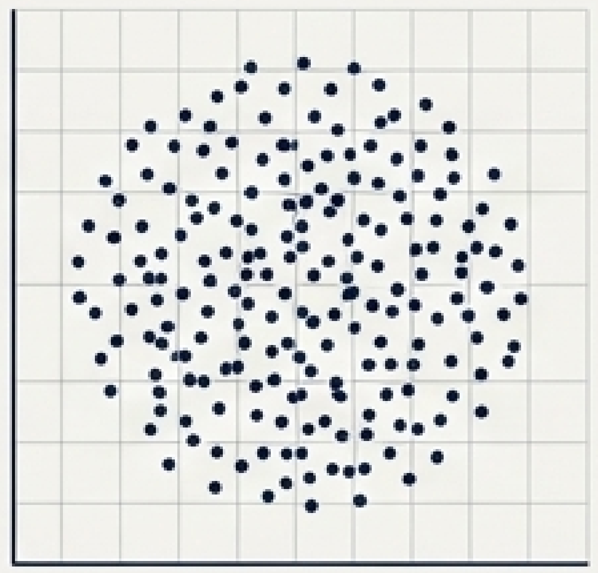
Covariance : Mesurer l'Interaction



Tendance haussière : Covariance > 0



Tendance baissière : Covariance < 0



Nuage déstructuré : Covariance = 0

Formule Pratique

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Rappel du Théorème de Transfert :
$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(X = x, Y = y)$

Propriétés Fondamentales (Bilinéarité)

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Indépendance et le Piège de la Covariance Nulle

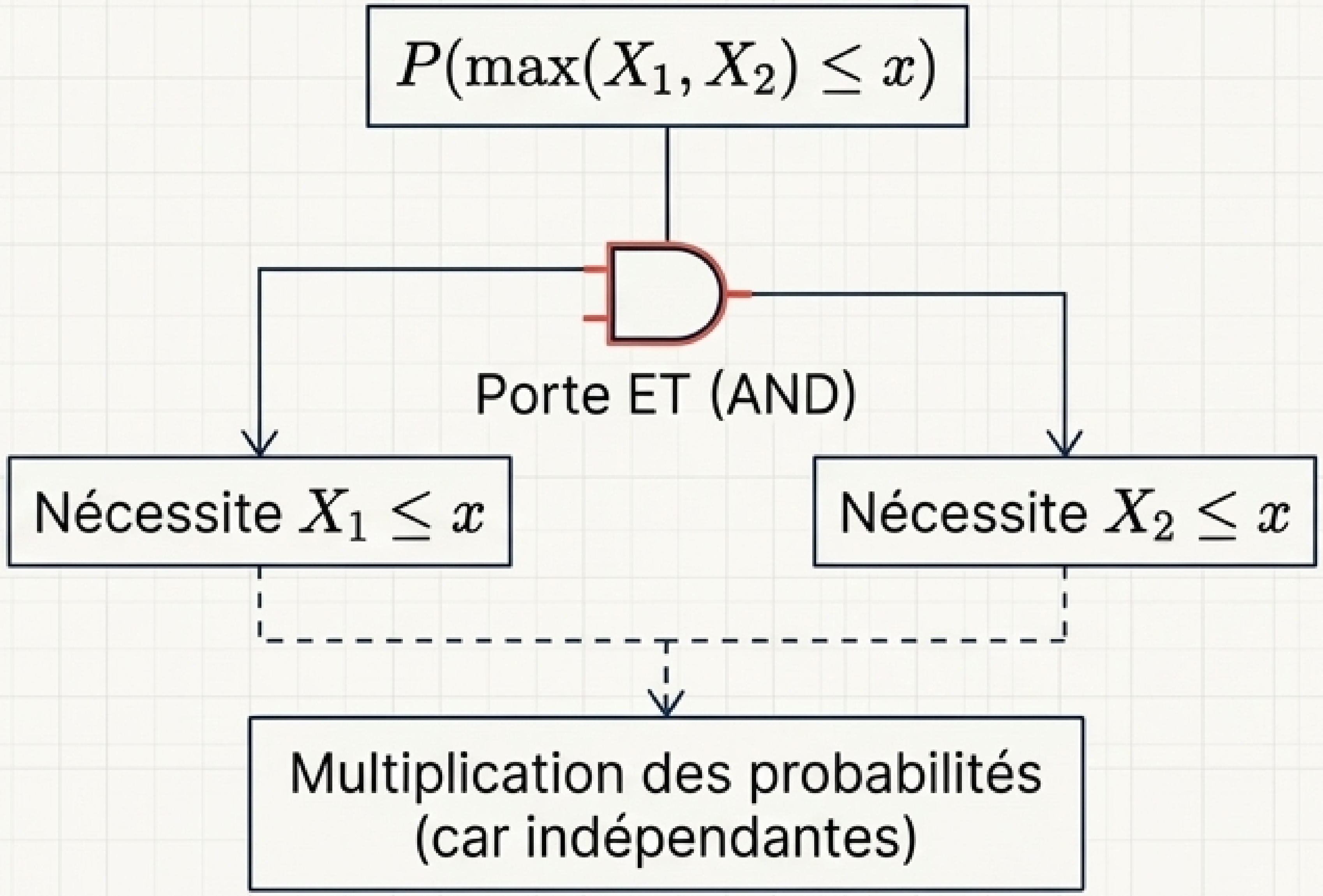
Condition d'Indépendance : $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$ pour TOUT couple (x, y).

$$\text{Variables Indépendantes} \xrightarrow{\text{L'espérance du produit est le produit des espérances}} Cov(X, Y) = 0$$

Attention : L'inverse est FAUX !

Conséquence : Si les variables sont indépendantes, la formule de variance se simplifie : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Opérations sur variables indépendantes : Le Maximum



Conclusion Mathématique

$$F_Y(x) = P(\max(X_1, X_2) \leq x)$$
$$F_Y(x) = P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x)$$
$$F_Y(x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

Loi de la Somme (Encart)

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $(X + Y) \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Le Bac à Sable : Modélisation Informatique

La Base Mathématique

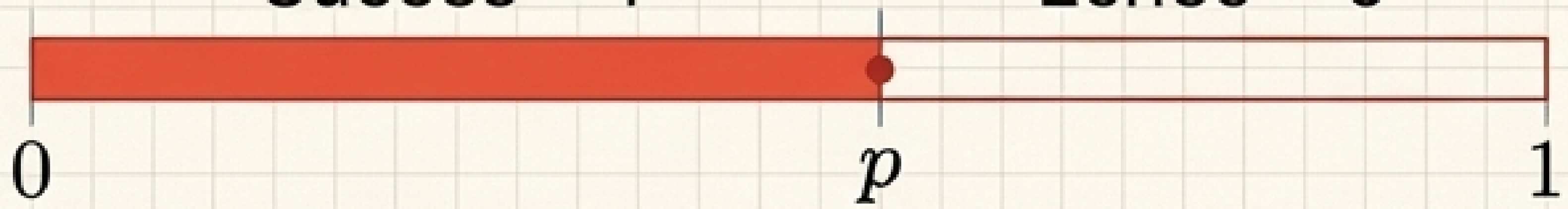
Tout découle de la variable uniforme continue $\mathcal{U}([0,1[)$.

Le Moteur Python

```python
import random as rdm

# Génère un float dans [0, 1[
rdm.random()
```

Application Directe (Bernoulli)




```python
def loiBernoulli(p):
    return int(rdm.random() <= p)
```

NotebookLM

Algorithmique des Lois Binomiale et Géométrique

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

```
def loiBinomiale(n, p):
    return sum([loiBernoulli(p) for _ in range(n)])
```

Logique : Une boucle `for` finie.

Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$

Temps d'attente du 1^er^ succès dans une suite d'épreuves.

```
def loiGeometrique(p):
    X = 1;
    while rdm.random() > p: # échec
        X += 1;
    return X
```

Logique : Une boucle boıucle `while` conditionnelle.

Simulation de la Loi de Poisson P(λ)

Méthode 1 : L'Approximation par la Binomiale

Pour un grand nombre d'épreuves n et une faible probabilité p.

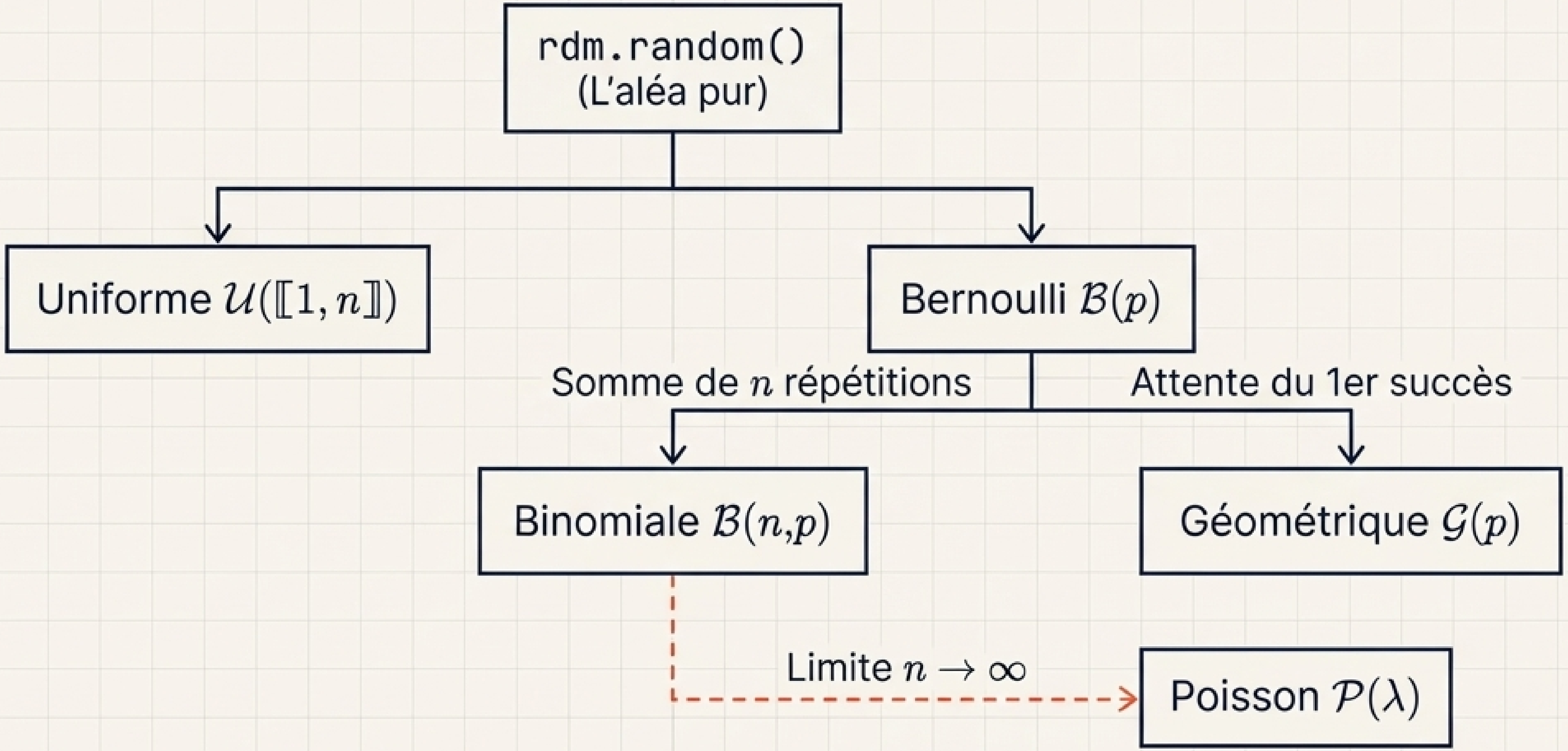
```
def loiPoisson_approx(lbd):
    n = 100
    p = lbd / n
    return loiBinomiale(n, p)
```

Méthode 2 : La Méthode Exacte (Temps d'attente)

Utilisation du lien avec la loi exponentielle (variables à densité).

```
def loiPoisson_exacte(lbd):
    S = -(1/lbd)*np.log(1-rdm.random())
    n = 0
    while S <= 1:
        S += -(1/lbd)*np.log(1-rdm.random())
        n += 1
    return n
```

L'Écosystème Discret



L'aléatoire n'est pas le chaos ; c'est une architecture rigoureuse.