

TD11 - Exercice 7

$X_k \cup \mathcal{E}(1)$ ,  $\forall k$  indépendantes

$\forall n \geq 2$ ,  $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

① a)  $U \cup \mathcal{U}_{(0,1)}$

Soit  $X = -\ln(U)$ ;  $X \cup \mathbb{R}_+$

$\forall x < 0$ ,  $F_X(x) = 0$ .

$\forall x \geq 0$ ,  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\ln(U) \leq x)$   
 $= P(\ln(U) \geq -x)$   
 $= P(U \geq e^{-x})$  car  $t \mapsto e^t \uparrow$  sur  $\mathbb{R}$   
 $= 1 - F_U(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$

car  $F_U(t) = t \ \forall t \in \mathcal{U}_{(0,1)}$  et  $x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} \in \mathcal{U}_{(0,1)}$

Soit  $F_X(x) = (1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Conclusion  $X \cup \mathcal{E}(1)$

b) on écrit une fonction de recherche de maximum.

```
def randomY(n):
    x = -log(random())
    for k in range(2, n+1):
        y = -log(random())
        if y > x:
            x = y
    return x
```

c)

```
def conjecture(n, m):
    L = [randomY(n) for k in range(m)]
    LS = [1/k for k in range(1, n+1)]
    return sum(L) / (m * sum(LS))
```

car d'après la loi faible des grands nombres  
 $\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{m}$  est un estimateur sans biais de  $E(Y_n)$

on fixe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$

② Soit  $F_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$

$Y_n(\omega) = \mathbb{R}_+$  donc  $\forall x < 0$ ,  $F_n(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, F_n(x) &= P(Y_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= (1 - e^{-x})^n \end{aligned}$$

Conclusion:  $F_n(x) = (1 - e^{-x})^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

la fonction  $F_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = 0 = F_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x)$

Conclusion  $F_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
dérivable sur  $\mathbb{R}^+$

à valeur  $Y_n$  est une VAR à densité: Soit  $f_n$  une densité. Alors:

$$f_n(x) = n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

③ a) Soit  $g: t \mapsto (1-t)^n$ ;  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0,1)$  et donc sur  $[0,u]$  pour tout  $u \in ]0,1[$

D'après le théor. des accroissements finis:

$$\exists c \in ]0,u[ \mid g(u) - g(0) = g'(c) \cdot u$$

$$\text{Soit } (1-u)^n - 1 = -n(1-c)^{n-1} \cdot u$$

$$\begin{aligned} \text{or } 0 < c < u &\Rightarrow -u < -c < 0 \Rightarrow 1-u < 1-c < 1 \\ &\Rightarrow -n(1-c)^{n-1} \cdot u > -nu \text{ car } -n < 0 \end{aligned}$$

D'où  $(1-u)^n - 1 > -nu$ ; Égalité si  $u=0$

Conclusion  $\forall u \in [0,1], (1-u)^n \geq 1 - nu$

$$5) \forall x > 0, f_n(x) = (1 - e^{-x})^n$$

d'après ce qui précède  $(1 - e^{-x})^n > 1 - ne^{-x}$   
 puisque  $u = e^{-x} \in ]0, 1[ \forall x > 0$ .

$$\text{Dès lors } 1 - f_n(x) \leq 1 - (1 - ne^{-x})$$

$$\text{ou encore, } \forall x > 0, 0 < 1 - f_n(x) \leq ne^{-x}$$

or  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  converge [car  $e^{-x}$  est une dérivée de  $x \mapsto -e^{-x}$ ]

Donc d'après le théorème de convergence par comparaison de intégrales de fonctions positives :

$$\int_0^{\infty} (1 - f_n(x)) dx \text{ converge}$$

Par ailleurs, d'après ce qui précède,

$$0 < x(1 - f_n(x)) \leq nxe^{-x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0 \text{ car } x = o(e^x)$$

Donc, d'après le théorème d'enlèvement des limites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(1 - f_n(x)) = 0$$

(4) a) Soit  $A > 0$ ,  $u: x \mapsto x$  et  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, A]$  donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A x f_n(x) dx &= \left[ x(F_n(x) - 1) \right]_0^A - \int_0^A (F_n(x) - 1) dx \\ &= A(F_n(A) - 1) - \int_0^A (F_n(x) - 1) dx \end{aligned}$$

ou encore :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A))$$

b) on étudie  $\int_{-\infty}^{\infty} |a f_n(x)| dx = I$

D'après la relation de Chades:

$$I = \int_0^{\infty} a f_n(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_n(x)) dx \quad \text{qui converge}$$

(puisque  $\lim_{A \rightarrow \infty} A(1 - F_n(A)) = 0$  d'après ③ a)

Conclusion  $E(Y_n)$  existe et vaut  $\int_0^{\infty} (1 - F_n(x)) dx$

⑤  $E(Y_n) = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-x})^n] dx$

Soit  $t = 1 - e^{-x} = \varphi(x)$  où  $\varphi \in \mathcal{C}'([0, +\infty[)$  et strictement croissante.  
 $dt = e^{-x} dx$

l'intégrale convergeant, on a:

$$E(Y_n) = \int_{\varphi(0)}^{\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)} (1 - t^n) \frac{dt}{1-t} \quad \left( \begin{array}{l} \text{puisque } e^{-x} = 1-t \\ \Rightarrow x = -\ln(1-t) \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{1-t} dt \end{array} \right)$$

Soit

$$E(Y_n) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

Dès lors  $E(Y_n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k \cdot dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k dt \quad \left[ \text{linéarité de l'intégrale} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Conclusion  $E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n$