



# T.D. Réduction d'endomorphismes.



Diagonaliser une matrice ;

Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans aide de calcul).

## Exercice 1 : ★

- ① Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés pour les matrices  $A$  et  $B$  suivantes, considérées respectivement comme les matrices d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[;$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ② Dire, parmi ces matrices, celles qui sont inversibles.  
③ Comment calculer dans chaque cas les puissances  $n$ èmes de ces matrices ?

## Exercice 2 : ★ Agro-Véto 2008

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de degré inférieur ou égale à 4, fonction nulle comprise. On considère l'application  $\varphi$  qui à toute fonction  $P$  de  $E$  associe la fonction  $\varphi(P)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(1/x)$$

- ① Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .  
② Exprimer  $\varphi^2$  en fonction de  $\varphi$  et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de  $\varphi$ . Montrer que  $\varphi$  est inversible et déterminer son inverse.  
③ Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\varphi$ . L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

## Exercice 3 : ★

Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , matrice canoniquement associée à  $f$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- ① Donner une base de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$   
② Montrer que tout vecteur de  $\text{Im } f$  est vecteur propre de  $f$ .  
③ En déduire sans calcul supplémentaire le spectre de  $f$ .  $f$  est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.  
④ En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de  $N$ .

#### Exercice 4 : ★ Agro-Véto 2007

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note  $e_1 = (1, 1, 1, 1)$  et  $e_2 = (1, 0, 0, 1)$

- ① Montrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\text{Im} f$  et déterminer une base de  $\text{Ker} f$ .
- ② Soit  $g$  définie sur  $\text{Im} f$  par  $g(x) = f(x)$ . Justifier brièvement que  $g$  est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base  $(e_1, e_2)$ .
- ③ Déterminer une base de vecteurs propres de  $g$ , puis de  $f$ .

#### Exercice 5 : ★★★

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$ . On cherche, si elles existent, les matrices de carré égale à  $A$ .

- ① On suppose que  $A$  est diagonale et qu'il existe  $X$  telle que  $X^2 = A$ .
  - a. Préciser la taille de  $X$  et montrer que  $AX = XA$ .
  - b. Calculer les coefficients de  $AX$  et de  $XA$  et en déduire que  $X$  est une matrice diagonale.
  - c. Conclure, selon que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , la forme et l'existence des matrices  $X$  possibles.
- ②  $A$  est cette fois non diagonale telle que  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ . Déterminer les matrices  $B$  telles que  $B^2 = A$ .
- ③ *Application* : Déterminer les matrices de carré égale à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

#### Exercice 6 : ★★

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ , matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  canoniquement associée à  $f \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ .

- ① Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice  $A$ .
- ② Soit  $g$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $g^3 + 2g = f$ 
  - a. Démontrer que  $g \circ f = f \circ g$ .
  - b. En déduire que tous les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  et que  $g$  est diagonalisable.
  - c. Trouver tous les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $g^3 + 2g = f$ .

#### Exercice 7 : ★★★ Agro-Véto 2007

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- ① Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?
- ② Déterminer une base  $\mathcal{B}'_3$  de  $\text{Ker}(f - 3id)^2$  et montrer que la juxtaposition d'une base  $\mathcal{B}_1$  de  $\text{Ker}(f - id)$  et de  $\mathcal{B}'_3$  donne une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- ③ En déduire qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- ④ Calculer  $T^n$  pour  $n$  entier naturel non nul et en déduire  $A^n$ .

## Exercice 8 : \*\* Agro-Véto 2019

Soit  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ . On considère la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  définie par  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ .

① On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculer  $j^2$ ,  $j^3$  et  $j^4$ .

② a. Soit  $r$  et  $s$  deux nombres complexes non nuls.

Montrer que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

Donner une base de vecteurs propres de  $M$ .

b. La matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable lorsque  $r = 0$  ou  $s = 0$ ?

③ Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si  $L=[a_1, \dots, a_n]$ , la liste  $[a_2, \dots, a_n, a_1]$ .

Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a1,a2,a3)` qui renvoie la matrice  $A$ .

On pourra par exemple compléter le script suivant :

```

1         def matrice(a1,a2,a3):
2             A = ...
3             L = ...
4             for i in ...
5                 A.append(L[:])
6             ...
7             return ...

```

④ Si  $a_1, a_2, a_3$  sont réels, la matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

⑤ Montrer que  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$ . Quelle est la valeur propre associée?

⑥ On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ . On pourra utiliser sans le justifier que la famille  $(U, X_1, X_2)$  est libre.

a. Calculer  $AX_1$  et  $AX_2$ .

En déduire qu'il existe des complexes  $r$  et  $s$  tels que  $AX_1 = s^2X_2$  et  $AX_2 = r^2X_1$ .

b. Déterminer le spectre de  $A$ .

On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes  $r$  et  $s$  introduits à la question 6. et utiliser la question 2.

⑦ Préciser si  $A$  est diagonalisable : (a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$  et (b)  $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$