

- Programme de colle quinzaine 9 -

Q1 : Loi normale. Théorème 2.3 : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Q2 : Loi normale centrée réduite. Espérance et variance (démonstration).

Q3 : Somme de variables aléatoires indépendantes (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur $[0, 1]$.

Q4 : Somme de variables aléatoires indépendantes (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de même paramètre λ .

Q5 : Soit f , endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Définir $E_\lambda(f)$ et montrer que c'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Q6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(E) = n$ et $A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$ où $\mathcal{B}$ est une base de E . Justifier l'équivalence :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_n) < n$$

Q7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

Q8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp}(f^n)$ et $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$.

Q9 : Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Exercices :

Les exercices porteront sur les points abordés en question de cours et, en probabilité, une application du produit de convolution sera demandée.

 *Remarque 1 :* Toute modélisation des variables aléatoires sera la bienvenue (savoir modéliser les lois uniforme, exponentielle et normales à l'aide de la seule fonction **random** de la bibliothèque **random** est une demande du programme de BCPST...)

 *Remarque 2 :* En algèbre, les questions posées resteront proches de celles de l'exercice 1 du TD. 12

Bonnes colles !