MATHEMATIQUES
Variables aléatoires à densité

PROBLEME 1 : Epreuve Agro-véto A 2024

Lu dans le rapport de jury : « *L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.*
De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entraînant. Une bonne utilisation des parenthèses est nécessaire pour marquer la priorité des opérations à effectuer.
Les questions de cours sont l'occasion pour les candidats de montrer leur sérieux, il ne faut pas les négliger. Lorsqu'il est explicitement demandé de prouver un résultat, on ne peut pas se contenter de dire qu'il apparaît dans le cours ou de citer son nom.
Lors de l'utilisation d'un théorème ou d'un résultat démontré dans une question précédente, il est nécessaire de s'assurer que ses hypothèses sont vérifiées. Il est tout à fait possible d'utiliser un résultat d'une question précédente même si l'on n'a pas réussi à la traiter, mais il est souhaitable de préciser de façon explicite à quelle question on fait référence. Évidemment, il convient de mettre des majuscules aux noms propres.
On ne peut que conseiller aux candidats de bien lire les questions et de prendre le temps de justifier et rédiger les questions traitées plutôt que de se lancer dans un grappillage très rarement fructueux.
Le jury note cette année encore un écart entre le niveau des candidats et celui attendu. Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité de l'épreuve (qui est longue pour couvrir une large partie du programme) pour avoir une note excellente. Par contre, pour avoir une note correcte, il est nécessaire de connaître son cours, de savoir raisonner, rédiger et calculer »

I. Résultats préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Soit $j \in [\![0\,;p]\!]$. Alors d'une part $\dbinom{p}{j}\dfrac{1}{1+j} = \dfrac{p!}{j!(p-j)!}\dfrac{1}{1+j} = \dfrac{p!}{(j+1)!(p-j)!}$.

Et d'autre part $\dbinom{p+1}{j+1}\dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} = \dfrac{p!}{(j+1)!(p-j)!}$.

Donc $\boxed{\dbinom{p}{j}\dfrac{1}{1+j} = \dbinom{p+1}{j+1}\dfrac{1}{p+1}.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question quasiment toujours bien traitée. On ne pouvait bien sûr pas se contenter de citer la formule du pion ou du capitaine ;* »

b) Soit $j \in [\![0\,;p-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)!(p-j-1)!} + \frac{p!}{j!(p-j)!} \\
&= \frac{p!(p-j)}{(j+1)!(p-j)!} + \frac{p!(j+1)}{(j+1)!(p-j)!} \\
&= \frac{p!(p+1)}{(j+1)!(p-j)!} \\
&= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \\
&= \boxed{\binom{p+1}{j+1}.}
\end{aligned}$$

✐ *démonstration 2 :* On considère une urne contenant $p+1$ boules (p noires et 1 blanche). Il y a dans ce cas $\binom{p+1}{j+1}$ tirages par poignées de $j+1$ boules dans cette urne et, parmi elles $\binom{p}{j+1}$ ne contiennent pas la boule blanche et $\binom{p}{j}$ contiennent la boules blanche.
La disjonction de ces deux derniers ensembles prouve le résultat.

Lu dans le rapport de jury : « *Seuls 45 % des candidats ont traité et réussi cette question. On ne peut, là non plus, pas se contenter de citer la formule de Pascal.*
De très rares candidats proposent une preuve combinatoire. »

2. Une densité de X : $\boxed{x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}^+}(x).}$

Fonction de répartition : $\boxed{x \mapsto (1-e^{-\lambda x}) 1_{\mathbb{R}^+}(x).}$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Il s'agissait d'une question de cours abordée dans quasiment toutes les copies et avec succès dans près de 70 % des cas.*
Les erreurs les plus fréquentes portent sur l'oubli de la fonction indicatrice.
Attention également aux parenthèses : $1-e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \neq (1-e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. »

3. a) Soit un entier $i \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc : $\forall t \in [i-1, i]$, $\frac{1}{i} \leqslant \frac{1}{t}$.
Comme $t \mapsto \frac{1}{i}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues sur $[i-1, i]$, on peut intégrer ces fonctions. On obtient par croissance de l'intégrale $\int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t}.}$$

De même, on a : $\forall t \in [i, i+1]$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{i}$, ce qui donne

$$\boxed{\int_{i}^{i+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{i}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question fréquemment traitée, mais moins de 10 % des copies ont la totalité des points notamment du fait de l'absence de justifications.*

— *Il fallait invoquer la décroissance de $t \longmapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et utiliser l'hypothèse $i > 1$ pour avoir $i-1 \in \mathbb{R}_+^*$.*
— *La croissance de l'intégrale devait être mentionnée. Attention, elle conduit à une implication : f ? g sur [a, b] n'équivaut pas à $\int_a^b$*
— *De rares candidats utilisent un schéma, ce qui est une bonne approche, mais ils mentionnent les aires des intégrales sans indiquer à quelle aire correspond $1/i$, ce qui est dommage et ne permet pas de donner la bonne inégalité. Même avec un schéma, il faut préciser que cela fonctionne grâce à la décroissance de la fonction.*

Certains candidats essaient d'autres méthodes, comme une étude de fonctions. L'idée est bonne, mais il faut se montrer rigoureux, ce qui est trop rarement le cas. Quelques copies tentent d'utiliser les accroissements finis, mais à nouveau une rédaction solide est très rare. »

b) Soit $n \geqslant 1$. Alors $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, donc

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

par opérations sur les limites. Donc $\boxed{\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

Lu dans le rapport de jury : « *Ce résultat classique n ?a été correctement traité que dans 25 % des cas. La définition correcte de $u \sim v$ a été valorisée car sa connaissance est peu maîtrisée : $u_n \sim v_n$ ne signifie pas :*

$$\underset{n\to\infty}{lim}(u_n - v_n) = 0 \text{ et } u_n \sim v_n \text{ n'implique par forcément } \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$$

Enfin obtenir un $u_n \sim 0$ devrait alerter et écrire $\underset{n\to\infty}{lim} \ln(n+1) = \ln(n)$ n'a pas de sens. »

c) L'encadrement de la question 3.a étant établi pour tout entier $i \geqslant 2$, on le somme pour i de 2 à n, ce qui donne par relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En ajoutant 1 et en divisant par $\ln(n)$ (strictement positif dès que $n \geqslant 2$) on obtient donc

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

D'après la question précédente, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc les membres de gauche et de droite de l'encadrement précédent tendent vers 1. Par théorème des gendarmes, il s'ensuit $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \ldots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ. On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Soit un réel x. Alors $[X_{(1)} > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$, donc l'indépendance de $X_1, \dots, X_n$ donne

$$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x).$$

Cependant, toutes les variables X_i suivent la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, par conséquent

$$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \begin{cases} (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction de répartition de $X_{(1)}$ est donnée par $F_{X_{(1)}}(x) = (1 - e^{-n\lambda x})1_{\mathbb{R}^+}(x)$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(n\lambda)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi, donc $\boxed{X_{(1)} \sim \mathcal{E}(n\lambda).}$

Lu dans le rapport de jury : *« Globalement, la décomposition de l'événement $(X_{(1)} > x)$ est correcte et l'utilisation de l'indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ est mentionnée. Il ne fallait pas oublier de traiter le cas négatif pour obtenir la loi de $X_{(1)}$. »*

5. Pour tout réel x, on a $[X_{(n)} \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$ ce qui donne par indépendance des X_i la fonction de répartition de $X_{(n)}$:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = F_{X_1}(x)^n = (1 - e^{-\lambda x})^n 1_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On constate :
— par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$, $F_{X_{(n)}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0 ;
— $\lim_{x \to 0} (1 - e^{-\lambda x})^n = 0$ donc $F_{X_{(n)}}$ est continue en 0.
Donc $\boxed{X_{(n)} \text{ est une variable à densité.}}$
En outre, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(1 - e^{-\lambda x})^n \right] = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$, donc une densité de $X_{(n)}$ est bien donnée par

$$\boxed{x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}}(x).}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Certains prennent le résultat donné et montrent qu'ils ont une densité de probabilité mais ne montrent pas que c'est une densité de $X_{(n)}$.*
Le résultat étant donné, il s'agissait de le justifier. Rappelons que X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si l'obtention avec justification de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}^+$ est souvent correcte, l'obtention sur $\mathbb{R}^-$ est oubliée, ainsi que la régularité.
Attention aux parenthèses : $\prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda x}) \neq \prod_{i=1}^{n} 1 - e^{-\lambda x}$ »

6. Préalablement, observons que pour tout réel $\mu > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} \, \mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\frac{1}{\mu^2}$. Pour le prouver, il suffit d'observer que $\int_0^{+\infty} \mu x e^{-\mu x} \, \mathrm{d}x$ est l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mu)$, donc est convergente et égale à $\frac{1}{\mu}$.

Ensuite, l'espérance de $X_{(n)}$ est donnée par l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

sous réserve de convergence. Or par binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} &= e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j(e^{-\lambda x})^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j e^{-\lambda(1+j)x}
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, l'intégrale I est donc convergente, l'espérance de $X_{(n)}$ existe et est égale à

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{(n)}) &= \sum_{j=0}^{n-1} n\lambda\binom{n-1}{j}(-1)^j\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(1+j)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} n\lambda\binom{n-1}{j}(-1)^j\frac{1}{(1+j)^2\lambda^2} \quad \text{car on reconnait } \frac{1}{\lambda(1+j)}\mathbb{E}(T) \text{ où } T\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda(1+j)) \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j+1}\frac{(-1)^j}{1+j}
\end{aligned}$$

en utilisant $\displaystyle\binom{n-1}{j}\frac{1}{j+1} = \binom{n}{j+1}\frac{1}{n}$ (d'après la question 1). On a donc bien

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *L'existence de l'espérance n'est pas assurée, on ne pouvait donc pas la manipuler sans précautions.*
La question était technique : le binôme de Newton a été correctement utilisé mais le calcul de l'intégrale a posé problème :
— *On pouvait reconnaître qu'à une constante multiplicative près, il s'agissait de l'espérance d'une loi exponentielle, mais la constante était souvent fausse et certaines copies sont allées jusqu'à modifier leur question 2 initialement juste pour obtenir le résultat attendu.*
— *On pouvait procéder par intégration par parties généralisée. On souligne alors la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.*
»

7. a) Par binôme de Newton, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}(-1)^k = (1-1)^{p+1} = 0.}$

Lu dans le rapport de jury : « *La question n'a été traitée que par* 60% *des copies, correctement dans* 60% *des cas* »

b) On établit le résultat par récurrence sur p.
— Initialisation : pour $p=1$, le résultat à prouver est

$$\binom{1}{1}\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

ce qui est vrai.

— Hérédité : supposons le résultat acquis pour un rang $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \binom{p+1}{p+1} \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \left[\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} \right] \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1} && \text{par la question 2} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} + \binom{p}{p} \frac{(-1)^p}{p+1} \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}}_{A} + \underbrace{\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1}}_{B}
\end{aligned}$$

D'une part, $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$ par hypothèse de récurrence.
D'autre part, en utilisant la première question :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} (-1)^j \\
&= -\frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k \\
&= -\frac{1}{p+1} \left(\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k - \binom{p+1}{0} (-1)^0 \right) \\
&= -\frac{1}{p+1} (0-1) && \text{par la question précédente} \\
&= \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve bien $\displaystyle\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}$, ce qui conclut la preuve de l'hérédité.

— Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question de synthèse traitée dans moins de la moitié des copies. La rédaction correcte de la récurrence a été valorisée de même que les copies amorçant l'hérédité en utilisant la formule de Pascal.* »

8. D'après les question 6 et 7, $\mathbb{E}(X_{(n)}) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Mais d'après la question 3.c, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X_{(n)}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\lambda}.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question traitée dans* $1/3$ *des copies avec succès dans plus de* 70% *des cas. Les résultats cohérents avec la question 3.c) ont eu la totalité des points.* »

9. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

a) *Montrer que* $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ *suit une loi exponentielle de paramètre* λ *:* C'est une question de cours. Ne pas hésiter dans sa rédaction.

b) En déduire une fonction `simulX_n(n)` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $X_{(n)}$ sans recourir à aucune autres fonctions Python que `rd.random()` de la bibliothèque `random` et `log` de la bibliothèque `math`. :
On peut écrire par exemple :

```python
import random as rd
from math import log

lbd = 2 # par exemple...

def simulXn(n):
    X_n = -(1/lbd)*np.log(1-rd.random())
    for k in range(1, n):
        X_suiv = -(1/lbd)*np.log(1-rd.random())
        if X_suiv > X_n:
            X_n = X_suiv
    return X_n
```

c) *Comment pourriez-vous utiliser cette fonction (et la bibliothèque* `numpy`*) pour valider avec Python la réponse à la question précédente ?* L'idée est de simuler un grand nombre de fois, de façon indépendante, m réalisations de la variables $X_{(n)}$ et calculer la moyenne de ces simulations qu'on confrontera avec $\ln(n)/\lambda$ en calculant le rapport des deux qui doit tendre vers 1.
Une rédaction possible, sans recours à la bibliothèque `numpy` est la suivante :

```python
def estimEspXn(n, m = 10000):
    S = 0
    for k in range(m):
        S += simulXn(n)
    return S/m

n = 200
print("espérance␣estimée␣:", estimEspXn(n))
print("équivalent␣obtenu␣:", log(n)/lbd)
print("le␣quotient␣vaut␣:", estimEspXn(n)/(log(n)/lbd))
```

III. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp\left[-\lambda \exp(-x)\right].$$

10. Premièrement, la fonction exp étant positive et continue, f est également positive et continue. Reste à prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est convergente et égale à 1.
Vérifions les hypothèses pour effectuer le changement de variable $y = \exp(-x)$.
— $x \mapsto \exp(-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, et on a $\mathrm{d}y = -\exp(-x)\,\mathrm{d}x$;

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est de même nature, et en cas de convergence de même valeur, que

$$\int_{+\infty}^{0} (-\lambda)\exp(-\lambda y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} \lambda\exp(-\lambda y)\,\mathrm{d}y.$$

On reconnaît l'intégrale de la densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, qui est donc convergente et égale à 1.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est densité de probabilité.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *La continuité et la positivité ont souvent été citées. La question a été problématique pour le calcul de l'intégrale impropre.*
- *Les hypothèses d'un changement de variables pour les intégrales impropres ne sont que trop rarement mentionnées. Le fait que le changement de variable soit donné par l'énoncé ne dispense pas de vérifier qu'il est licite surtout sur une intégrale généralisée.*
- *Le changement d'écriture de l'intégrale après changement de variable reste très problématique, ce qui amène à des erreurs pour trouver 1 à la fin.*
- *Certains reconnaissent une primitive, ce qui simplifiait beaucoup la question.*

»

11. Calculons la fonction de répartition F_Y de Y. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leqslant x)\\
&= \mathbb{P}(-\ln X_1 \leqslant x)\\
&= \mathbb{P}(\ln X_1 \geqslant -x)\\
&= \mathbb{P}(X_1 \geqslant e^{-x}) && \text{car } \exp \text{ croît strictement ;}\\
&= e^{-\lambda e^{-x}} && \text{car } X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda).
\end{aligned}$$

Il apparaît que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc Y admet une densité égale à F_Y' c'est-à-dire

$$x \mapsto \lambda\exp(-x)\exp[-\lambda\exp(-x)]$$

Donc $\boxed{Y = -\ln X_1 \text{ suit la loi de Gumbel.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *La réponse étant donnée, les points sont attribués au raisonnement. Exemple de niveau de rigueur attendu,* ***les points valorisés sont encadrés****.*
On détermine la fonction de répartition de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(-\ln(X_1) \le x) = \mathbb{P}(\ln(X_1) \ge -x)$$

Comme $\boxed{\exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$*, on en déduit que :*

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(X_1 \ge e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-x})$$

Or $\boxed{X_1 \textit{ est à densité}}$ *donc :*

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \boxed{1 - F_{X_1}(e^{-x})}$$

Enfin, X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc :

$$\mathbb{P}(Y \le x) = 1 - (1 - \exp(-\lambda\exp(-x))) = \exp(-\lambda\mathrm{e}^{-x})$$

On constate alors que $\boxed{F_Y \textit{ est de classe } \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$ *(grâce aux théorèmes d'opérations). On peut donc conclure que Y est à densité de densité :*

$$F_Y' : x \longmapsto \lambda e^{-x}\exp(-\lambda e^{-x})$$

Autrement dit, Y suit une loi de Gumbel »

12. a) — On commence par rappeler que $U(\Omega) =]0,1[$. Dès lors :

$$0 < u < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-u < 1 \Leftrightarrow -\ln(1-u) > 0 \Leftrightarrow -\ln(-\ln(1-u)) \in \mathbb{R}$$

Soit $V(\Omega) = \mathbb{R}$ qui est l'univers image d'une loi de Gumbel.

— $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(-\ln(1-U)) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\ln(-\ln(1-U)) \geq -x) = \mathbb{P}(-\ln(1-U) \geq e^{-x}) = \mathbb{P}(\ln(1-U) \leq -e^{-x}) \\ &= \mathbb{P}(1-U) \leq exp(-e^{-x})) = \mathbb{P}(U \geq 1 - exp(-e^{-x})) = 1 - F_U(1-exp(-e^{-x})) \\ &= 1 - \big(1 - exp(-e^{-x})\big) = exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

— On dérive F_V pour obtenir une densité f_V de V. Soit :

$f_V(x) = F_V'(x) = e^{-x}exp(-e^{-x})$ qui est une densité de la loi de Gumbel de paramètre A

Conclusion : $\boxed{V = -\ln(-\ln(1-U)) \text{ suit une loi de Gumbel de paramètre } 1}$

b) Pour simuler une loi de Gumbel de paramètre 1 il suffit donc de savoir modéliser la loi uniforme sur $]0,1[$. Par exemple :

```python
def simulGumbel():
    return -log(-log(1-rd.random()))
```

c) Comme en II.9, on estimera l'espérance grâce à un calcul de moyenne en faisant :

```python
np.mean([simulGumbel() for _ in range(10000)])
```

d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout n assez grand, $1 + \dfrac{x}{n} > 0$, et

$$\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x$$

donc $\ln\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Par composition de limites $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp(x).}$

Lu dans le rapport de jury : « *La réponse étant donnée, les points sont attribués au raisonnement.* »

e) On a calculé à la question 5 la fonction de répartition de $X_{(n)}$, qui était (pour $\lambda = 1$)

$$x \mapsto (1-e^{-x})^n 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Mais pour tout réel x, on a $\mathbb{P}(X_{(n)} - \ln(n) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x + \ln(n))$. Donc la fonction de répartition de $X_{(n)} - \ln(n)$, que l'on notera H_n, est égale à

$$H_n : x \mapsto (1-e^{-(x+\ln n)})^n 1_{[-\ln(n),+\infty[}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n 1_{[-\ln(n),+\infty[}(x).$$

Or, pour un réel x donné :

— d'une part $\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-e^{-x}}$ par la question précédente,

— d'autre part $1_{[-\ln(n),+\infty[}(x) = 1$ pour tout n assez grand, car $-\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Donc $H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-e^{-x}}$. Mais $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est (dans le cas où $\lambda = 1$) la fonction de répartition de la loi de Gumbel, qu'on avait trouvée à la question 12. C'est donc la fonction de répartition de Y. Par conséquent $\boxed{(X_{(n)} - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } Y.}$

PROBLEME 2 : Epreuve G2E 2024

Lu dans le rapport de jury : « *Le second problème était consacré dans sa première partie à des calculs d'intégrales, l'objectif étant de calculer la valeur d'une intégrale généralisée à l'aide d'un passage à la limite en lien avec les lois normales (mais sans utiliser celles-ci). Dans la seconde partie on s'intéresse au minimum et au maximum de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite et on en calcule l ?espérance et la variance à l'aide d'intégrations par parties.*
Globalement, ce problème a, semble-t-il, été un peu mieux compris que le premier. Néanmoins, les différentes techniques d'intégration sont certes connues mais souvent mal maîtrisées et utilisées sans aucune hypothèse. »

Partie A : Calcul d'une intégrale généralisée

Dans cette partie, on souhaite calculer (indépendamment de toute notion probabiliste) la valeur de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette première partie du second problème présentait une suite d'intégrales classiques, dites de Wallis, dont on cherchait un équivalent. Dans un second temps, par un changement de variable et un passage à la limite on en déduisait la valeur d'une intégrale généralisée.*
Nous avons constaté que les candidats ne maîtrisaient pas toujours bien les méthodes d'intégration. Nous invitons les futurs candidats 'a ne pas oublier les hypothèses relatives à une intégration par partie (d'autant plus lorsqu'il s'agit d'une intégrale généralisée) ou à un changement de variable (généralisé ou non) et à travailler davantage les techniques de majoration d'intégrales. »

① En justifiant que $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \geqslant 1$, prouver la convergence de l'intégrale précédente.

— Soit x un réel supérieur à 1. On a alors $x \leq x^2$ et donc $-x \geq -x^2$ puis $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ par croissance de exp.

— Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée uniquement à cause de la borne $+\infty$ car $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ par composition. De même, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée uniquement à cause de la borne $+\infty$. Comme les fonctions intégrées sont positives, l'inégalité prouvée montre, par le théorème de comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ converge.

— Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ converge. Soit A un élément de $[1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^{A} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-A}.$$

Comme $\displaystyle\mathop{lim}_{A \to +\infty} (\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-A}) = \mathrm{e}^{-1}$, on peut affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ converge.

— On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ converge. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, la relation de Chasles entraîne que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ converge. Par parité de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ converge.

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien } \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \geqslant 1 \text{ et } I \text{ converge.}}$

② On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n.$$

On commence à noter que, pour tout entier naturel n, W_n existe car $\cos^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit n un entier naturel. Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$$

car $0 \leq \cos(t) \leq 1$ et $0 \leq \cos^n(t)$ et donc, par croissance de l'intégration (invocable car les bornes sont dans le bon sens ($0 \leq \frac{\pi}{2}$) et par continuité, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ des fonction intégrées), on obtient :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\ dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$$

soit $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. Comme $0 < \cos^{n+1}(t) < \cos^n(t)$ pour $t = \frac{\pi}{4}$ et comme les fonction intégrées sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut préciser que ces inégalités sont des inégalités strictes.

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n..}$

b) Par intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$:
Soit n un entier naturel. $x \mapsto -\dfrac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin^2(x)\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(x)\sin(x)) \times \sin(x)\ dx \\
&= \left[-\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\ dx \\
&= 0 + \frac{1}{n+1} W_{n+2}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}(x)\cos^2(x)\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}(x)(1-\sin^2(x))\ dx \\
&= W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}(x)\sin^2(x)\ dx \text{ par linéarité} \\
&= W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2} \text{ d'après le début de la question}
\end{aligned}$$

On a donc $W_{n+2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = W_n$ et, en multipliant par $n+1$, on obtient que :

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n.}$

c) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Réponse : Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{H}(n) : \text{"}nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}\text{"}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx \\
&= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}(1)$ est donc vraie car on a $1W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. On suppose $\mathcal{H}(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. On a :

$$\begin{aligned}
(n+1)W_{n+1}W_n &= (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n \text{ d'après la question précédente et car } n-1 \in \mathbb{N} \\
&= nW_nW_{n-1} \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ d'après } \mathcal{H}(n).
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie. $\mathcal{H}(1)$ est vraie et, pour tout entier naturel non nul n, $\mathcal{H}(n)$ implique $\mathcal{H}(n+1)$. $\mathcal{H}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel non nul n d'après le principe de récurrence. On a donc prouvé :

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}.}$

d) En utilisant 2.(a) et 2.(b), démontrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$ et en déduire que :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Soit n un entier naturel non nul.

— On a $0 \leq W_{n+1} < W_n < W_{n-1}$ d'après la question 2)a).
En divisant par W_{n+1} (qui est positif), on obtient :

$$1 < \frac{W_n}{W_{n+1}} < \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}.$$

Mais d'après la question 2)b), on a $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$, et donc :

$$1 < \frac{W_n}{W_{n+1}} < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

On conclut par passage à la limite que $\underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.

ou encore : $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}}$

— D'après ce qui précède :

$$nW_nW_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} nW_n^2$$

Soit, d'après la question 2)c) : $nW_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ et donc $W_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$

Conclusion : $\boxed{W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

③ a) Démontrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Réponse 1 : Soit $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ par composition (car $1+x > 0$ pour tout x de $]-1, +\infty[$) et, pour tout x de $]-1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Comme, pour tout réel x de $]-1, +\infty[$, on a : $\dfrac{x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, on en déduit que g est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. g admet donc un minimum en 0 qui vaut $g(0)$, soit 0. En conclusion, g est positive et donc :

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1, +\infty[, \text{ on a : } \ln(1+x) \leqslant x.}$

Réponse 2 : On peut aussi appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0, x] \subset]-1, +\infty[$. Donc :

$$\exists c \in]0, x[/ \ln(1+x) - \ln(1) = \frac{1}{1+c}(x - 0) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

Il suffit alors de dire que $c > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+c} < 1$ et donc, puisque $x > 0$: $\boxed{\ln(1+x) \leq x}$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

Soit n un entier naturel non nul. Soit x un élément de $\left[0, \sqrt{n}\right]$.

— On suppose $x \in \left[0, \sqrt{n}\right[$. On a donc $x^2 < n$ et donc $-\dfrac{x^2}{n} > -1$ car $n > 0$. On peut donc réinvestir la question précédente :

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

ce qui donne $n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \leqslant -x^2$ car $n > 0$. Par croissance de exp, on a alors :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Cette dernière inégalité est triviale pour $x = \sqrt{n}$. On a donc prouvé que pour tout x de $\left[0, \sqrt{n}\right]$, on a :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Par croissance de l'intégration, invocable par continuité des fonctions intégrées et car les bornes sont dans le sens croissant, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x.$$

— On a $\dfrac{x^2}{n} \geq -1$ car c'est un quotient de nombres strictement positifs. On peut donc réinvestir la question précédente :

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n}$$

ce qui donne $-n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right) \geqslant -x^2$ puis, par croissance de exp, l'inégalité suivante :

$$\mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

puis, par croissance de l'intégration, invocable par continuité des fonctions intégrées et car les bornes sont dans le sens croissant, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}x.$$

Conclusion : On a bien démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}x.$$

c) En utilisant dans la première intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ et dans la troisième intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

Posons $x = u_1(t) = \sqrt{n}\sin(t)$ (réciproque de la fonction de changement de variable qui nous intéresse !). La fonction u_1 est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$.

On en déduit que le changement de variable $x \longmapsto u_1^{-1}(x) = t$ est licite car u_1^{-1} est comme u_1 de

classe $\mathcal{C}^1$, bijective de $[0, \sqrt{n}]$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Il donne $dx = \sqrt{n}\cos(t)dt$ et de $\sqrt{n}\sin(0) = 0$ et $\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{n}$, on déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - n\frac{\sin^2(t)}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos(t)dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\cos(t)dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt \\ &= \sqrt{n}W_{2n+1}.\end{aligned}$$

De même le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ est licite car $t \mapsto \sqrt{n}\tan(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $[0, \sqrt{n}]$ et strictement croissante. C'est donc aussi le cas de sa réciproque qui constitue notre fonction changement de variable...
Il donne $dx = \sqrt{n}(1 + \tan^2(t))dt$ et de $\sqrt{n}\tan(0) = 0$ et $\sqrt{n}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{n}$, on déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + n\frac{\tan^2(t)}{n}\right)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2(t))dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(t)\right)^{1-n} dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^{1-n} dt \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)dt < \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)dt \text{ car } \cos^{2n-2} > 0 \text{ sur } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ &< \sqrt{n}W_{2n-2}.\end{aligned}$$

Ces deux égalités ainsi que la question précédente donne alors de manière immédiate :

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.}$

d) En déduire enfin que $I = \sqrt{\pi}$.
Soit n un entier naturel non nul. On vient de voir que :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

On sait aussi que $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, on en déduit que $\sqrt{2n}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}$ et donc $\sqrt{4n+2}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}$ et donc :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De la même façon, on prouve que $\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Cela prouve que $\underset{n\to\infty}{lim}\left(\sqrt{n}W_{2n+1}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\underset{n\to\infty}{lim}\left(\sqrt{n}W_{2n-2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. L'inégalité précédente et le théorème des gendarmes nous permettent alors de dire que :

$$\underset{n\to\infty}{lim}\left(\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis, par parité, la conclusion attendue :

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{\text{On a bien : } I = \sqrt{\pi}.}$$

Partie B : Maximum et minimum

Dans cette partie, on se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

On note par ailleurs $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

④ Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$:
D'après le cours, on sait que :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Par composition, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \times -\frac{2x}{2}\\ &= -x\varphi(x).\end{aligned}$$

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ et } \varphi'(x) = -x\varphi(x).}$$

b) Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ.
φ est une densité de X_1 et Φ sa fonction de répartition. Comme φ est continue, on sait que :

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.}$$

⑤ a) Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ :

— Soit t un réel. On note que le maximum de X_1 et X_2 est inférieur à t si et seulement si X_1 comme X_2 est inférieur à t. On a donc :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leqslant x)\\ &= \mathbb{P}\left((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)\right)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \text{ par indépendance}\\ &= (\Phi(x))^2.\end{aligned}$$

— Soit t un réel. On note que le minimum de X_1 et X_2 est strictement supérieur à t si et seulement si X_1 comme X_2 est strictement supérieur à t. On a donc :

$$\begin{aligned}F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leqslant x)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Z > x)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left((X_1 > x) \cap (X_2 > x)\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \times P(X_2 > x) \text{ par indépendance}\\ &= 1 - (1 - \Phi(x))^2.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a donc : } F_Y = \Phi^2 \text{ et } F_Z = 1-(1-\Phi)^2.}$

b) En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ :

Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, d'après la question précédente où on a vu :

$$F_Y = \Phi^2 \text{ et } F_Z = 1-(1-\Phi)^2,$$

on peut dire, par produit et somme, que F_Y et F_Z sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sont donc en particulier continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. D'après le cours, Y et Z admettent des densités et, comme leurs fonctions de répartitions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, une densité de Y est F_Y' et une densité de Z est F_Z'. Pour tout réel x, on a donc :

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= 2\Phi(x)\Phi'(x) \\ &= 2\Phi(x)\varphi(x). \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_Z(x) &= 2(1-\Phi(x))\Phi'(x) \\ &= 2(1-\Phi(x))\varphi(x). \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a obtenu : } f_Y : x \mapsto 2\Phi(x)\varphi(x),\ f_Z : x \mapsto 2(1-\Phi(x))\varphi(x).}$

⑥ a) Démontrer que Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x.$$

On vient de voir que : $f_Y : x \mapsto 2\Phi(x)\varphi(x)$. Y admet donc une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} 2x\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ converge absolument, soit si, et seulement si d'après la question 4)a), $\int_{-\infty}^{+\infty} -2\varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$ converge absolument ce qui équivaut, par linéarité, à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$.
Montrons maintenant comment passer de la convergence absolue à la convergence.. :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)\Phi(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)|\Phi(x)dx \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} |\varphi'(x)|\Phi(x)dx \text{ converge et } \int_{0}^{+\infty} |\varphi'(x)|\Phi(x)dx \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\Phi(x)dx \text{ converge et } \int_{0}^{+\infty} -\varphi'(x)\Phi(x)dx \text{ converge} \\ &\quad \text{car } \varphi \text{ est croissante sur }]-\infty,0] \text{ et décroissante sur }]0,+\infty[\\ &\quad \text{et donc } \varphi'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty,0] \text{ et } \varphi'(x) < 0 \text{ sur }]0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\Phi(x)dx \text{ converge et } \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)dx \text{ converge} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet une espérance ssi, } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

b) À l'aide d'une intégration par parties et de I (définie en partie A), calculer cette dernière intégrale :
Par continuité des fonctions intégrées, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée uniquement aux bornes $+\infty$ et $-\infty$. Pour pouvoir traiter les deux bornes simultanément, on va raisonner sur l'intégrale définie : $\int_A^B \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$.

Φ et φ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[A, B]$.
On a donc, par intégration par parties, les égalités suivantes :

$$\int_A^B \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x = [\varphi(x)\Phi(x)]_A^B - \int_A^B \varphi(x)\Phi'(x)\mathrm{d}x$$

avec $\underset{B\to+\infty}{lim} \varphi(B)\Phi(B) = 0 = \underset{A\to-\infty}{lim} \varphi(A)\Phi(A)$ par produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction qui tend vers 1.
Et donc, par passage à la limite :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x &= \underset{B\to+\infty}{lim}(\varphi(B)\Phi(B)) - \underset{A\to-\infty}{lim}(\varphi(A)\Phi(A)) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ qui converge} \\ &= 0 - \frac{1}{2\pi}I.\end{aligned}$$

Ces différents calculs prouvent :

Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } -\frac{1}{2\pi}I, \text{ soit } -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.}$

c) En déduire que Y admet pour espérance :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

D'après les deux dernières questions, Y admet une espérance car $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$ converge et son espérance vaut $-2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$ d'après la question 6)a), soit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ d'après la question 6)b).

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$

d) En justifiant que $Y + Z = X_1 + X_2$, en déduire également l'espérance de Z.
Soit ω un réel.
— Si $X_1(\omega) \geq X_2(\omega)$, on a $Y(\omega) = X_1(\omega)$ et $Z(\omega) = X_2(\omega)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(Y + Z)(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ &= (X_1 + X_2)(\omega).\end{aligned}$$

— Si $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$, on a $Y(\omega) = X_2(\omega)$ et $Z(\omega) = X_1(\omega)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(Y + Z)(\omega) &= X_2(\omega) + X_1(\omega) \\ &= (X_1 + X_2)(\omega).\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $Y + Z = X_1 + X_2$. On en déduit :

$$Z = X_1 + X_2 - Y.$$

Comme X_1, X_2 et Y admettent des espérances, on en déduit, par linéarité, que Z admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y) \\ &= 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien : } Y + Z = X_1 + X_2. \text{ On en déduit : } \mathbb{E}(Z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}.}$

⑦ a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que Y^2 admet une espérance égale à 1 :
On a vu que : $f_Y : x \mapsto 2\Phi(x)\varphi(x)$. On peut donc dire, par le théorème du transfert, que Y^2 admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ converge absolument, soit, comme la fonction intégrée est positive, Y^2 admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ converge.
Sous réserve d'existence et par le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} 2x\Phi(x) \times \varphi'(x)\mathrm{d}x \text{ d'après la question 4)a)} \\
&= -\left[2x\Phi(x) \times \varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x) \times \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\Phi'(x) \times \varphi(x)\mathrm{d}x \text{ par IPP} \\
&\quad \text{possible car } x \mapsto 2x\Phi(x) \text{ et } \varphi \text{ sont des fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \\
&\quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) \text{ par croissances comparées} \\
&= 0 - 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x)\Phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\varphi^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\Phi^2(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \text{ de nouveau d'après la question 4)a)} \\
&= 1^2 - 0^2 - \left[\varphi^2(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} \text{car } \Phi \text{ est une fonction de répartition} \\
&= 1 - 0 + 0 \text{ d'après l'expression de } \varphi \text{ vue en 4)a)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Toutes les limites vues dans ces différentes égalités ont été justifiées. On en déduit donc l'existence de $\mathbb{E}(Y^2)$ et :

Conclusion : $\boxed{\text{On a prouvé que } Y^2 \text{ admet une espérance égale à 1.}}$

b) En déduire que Y admet une variance que l'on déterminera.
Y^2 admet une espérance. D'après la formule de Kœnig-Huyghens, on peut donc affirmer que Y admet une variance qui vaut $\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$, soit $1 - \dfrac{1}{\pi}$ d'après les questions précédentes.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet bien une variance, elle vaut } \dfrac{\pi - 1}{\pi}.}$

⑧ a) À nouveau par intégration par parties, démontrer que Z^2 admet une espérance égale à 1 :
On raisonne de la même façon qu'en 7)a). Sous réserve d'existence et par le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2(1 - \Phi(x))\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\Phi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\varphi(x)\mathrm{d}x - 1 \text{ d'après la question précédente} \\
&= 2\mathbb{E}(X_1^2) - 1 \text{ par le théorème du transfert} \\
&= 2\mathbb{V}(X_1) + 2(E(X_1))^2 - 1 \text{ par la formule de Kœnig-Huyghens} \\
&= 2 \times 1 + 2 \times 0^2 - 1 \text{ car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Toutes les intégrales généralisées vues dans ces différentes égalités sont convergentes d'après le cours ou d'après les questions précédentes.
On en déduit donc l'existence de $\mathbb{E}(Z^2)$ et :
Conclusion : $\boxed{Z^2 \text{ admet une espérance égale à } 1.}$
Par contre, on n'a pas fait d'intégration par parties, cela aurait pu se faire en utilisant les mêmes astuces que en 7)a).

b) En déduire que Z admet une variance que l'on déterminera :
Z^2 admet une espérance. D'après la formule de Kœnig-Huyghens, on peut donc affirmer que Z admet une variance qui vaut $\mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$, soit $1 - \dfrac{1}{\pi}$ d'après les questions précédentes.
Conclusion : $\boxed{Z \text{ admet bien une variance, elle vaut } \dfrac{\pi - 1}{\pi}.}$

c) Y et Z sont-elles indépendantes ?
Supposons Y et Z indépendantes. On aurait alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y+Z) &= \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(Z)\\ &= 2\frac{\pi-1}{\pi} \text{ d'après les questions 7)a et 7)b).}\end{aligned}$$

Or, d'après la question 6)d) et par indépendance de X_1 et X_2, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y+Z) &= \mathbb{V}(X_1 + X_2)\\ &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2)\\ &= 2 \text{ car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes.}}$