

MATHEMATIQUES
Variables aléatoires à densité
PROBLEME 1 : Epreuve Agro-véto A 2024
I. Résultats préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall j \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $\binom{p}{j} \frac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1} \frac{1}{p+1}$.

b) Montrer que $\forall j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner, sans justification, une fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X en fonction de λ .

II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ .

On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

3. Calculer $\mathbb{P}(X_{(1)} > x)$ pour tout réel x strictement positif et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

4. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}_+}(x).$$

5. En déduire que :

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-(1+j)\lambda x} dx$$

6. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

a) Montrer que $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

b) En déduire une fonction `simulX_n(n)` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $X_{(n)}$ sans recourir à aucune autres fonctions Python que `rd.random()` de la bibliothèque `random` et `log` de la bibliothèque `math`.

c) Comment pourriez-vous utiliser cette fonction (et la bibliothèque `numpy`) pour valider avec Python la réponse à la question précédente ?

III. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ . On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp[-\lambda \exp(-x)].$$

7. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.

On appellera cette loi *la loi de Gumbel de paramètre λ* .

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = \exp(-x)$.

8. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel de paramètre λ .
9. On s'intéresse désormais à la loi de Gumbel de paramètre $\lambda = 1$.
- a) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
Montrer que la variable aléat. $V = -\ln(-\ln(1 - U))$ suit une loi de Gumbel de paramètre $\lambda = 1$.
- b) Proposer une fonction Python `simulGumbel()` qui renvoie une simulation de V .
✎ Remarque : Comme pour la question 9.b) seules les fonctions `log` de la bibliothèque `math` et `random()` de la bibliothèque `random()` sont autorisées.
- c) En déduire le moyen d'estimer l'espérance de la loi de Gumbel de paramètre 1 avec Python (le recours à la bibliothèque `numpy` est là aussi autorisé).
- d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

PROBLEME 2 : Epreuve G2E 2024

L'objectif de la partie A de ce premier problème est de calculer une intégrale généralisée, par des outils d'analyse (équivalent d'une suite, encadrement...).

Le résultat obtenu en partie A est utilisé en partie B pour calculer l'espérance et la variance du maximum et du minimum de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales.

Partie A : Calcul d'une intégrale généralisée

Dans cette partie, on souhaite calculer (indépendamment de toute notion probabiliste) la valeur de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

① En justifiant que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 1$, prouver la convergence de l'intégrale précédente.

② On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n.$$

③ a) Démontrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

c) En utilisant dans la première intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(t)$ et dans la troisième intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan(t)$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

Partie B : Maximum et minimum

Dans cette partie, on se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

On note par ailleurs $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

④ Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

b) Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ .

⑤ a) Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ .

b) En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ .