

MATHEMATIQUES
Variables aléatoires à densité

Le sujet se compose de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

PROBLEME 1 : Epreuve Agro-véto A 2024

I. Résultats préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall j \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $\binom{p}{j} \frac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1} \frac{1}{p+1}$.

b) Montrer que $\forall j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner, sans justification, une fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X en fonction de λ .

3. a) Démontrer que, pour tout entier $i > 1$, on a :

$$\int_i^{i+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{dt}{t}.$$

b) Justifier l'équivalent : $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

c) En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ .

On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X_{(1)} > x)$ pour tout réel x strictement positif et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

5. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}}(x).$$

6. En déduire que :

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-(1+j)\lambda x} dx$$

puis, en utilisant les résultats de la partie I, que :

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

7. Dans cette question on veut prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$.

b) En utilisant les résultats de la partie I, prouver le résultat souhaité par récurrence.

8. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_{(n)})$.

9. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

a) Montrer que $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

b) En déduire une fonction `simulX_n(n)` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $X_{(n)}$ sans recourir à aucune autres fonctions Python que `rd.random()` de la bibliothèque `random` et `log` de la bibliothèque `math`.

c) Comment pourriez-vous utiliser cette fonction (et la bibliothèque `numpy`) pour valider avec Python la réponse à la question précédente ?

III. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ . On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp[-\lambda \exp(-x)].$$

10. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.

On appellera cette loi *la loi de Gumbel de paramètre λ* .

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = \exp(-x)$.

11. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel de paramètre λ .

12. On s'intéresse désormais à la loi de Gumbel de paramètre $\lambda = 1$.

a) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que la variable aléat. $V = -\ln(-\ln(1 - U))$ suit une loi de Gumbel de paramètre $\lambda = 1$.

b) Proposer une fonction Python `simulGumbel()` qui renvoie une simulation de V .

🔍 *Remarque* : Comme pour la question 9.b) seules les fonctions `log` de la bibliothèque `math` et `random()` de la bibliothèque `random()` sont autorisées.

c) En déduire le moyen d'estimer l'espérance de la loi de Gumbel de paramètre 1 avec Python (le recours à la bibliothèque `numpy` est là aussi autorisé).

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

e) On note $T_n = X_{(n)} - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer F_{T_n} et montrer que pour tout x réel, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{T_n}(x) = F_Y(x)$.

🔍 On vient de montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y .

PROBLEME 2 : Epreuve G2E 2024

L'objectif de la partie A de ce premier problème est de calculer une intégrale généralisée, par des outils d'analyse (équivalent d'une suite, encadrement...).

Le résultat obtenu en partie A est utilisé en partie B pour calculer l'espérance et la variance du maximum et du minimum de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales.

Partie A : Calcul d'une intégrale généralisée

Dans cette partie, on souhaite calculer (indépendamment de toute notion probabiliste) la valeur de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

① En justifiant que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 1$, prouver la convergence de l'intégrale précédente.

② On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < W_{n+1} < W_n.$$

b) Par intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

c) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

d) En utilisant 2.(a) et 2.(b), démontrer que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n-1}$ et en déduire que :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

③ a) Démontrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

c) En utilisant dans la première intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(t)$ et dans la troisième intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan(t)$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

d) En déduire enfin que $I = \sqrt{\pi}$.

Partie B : Maximum et minimum

Dans cette partie, on se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

On note par ailleurs $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

④ Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

b) Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ .

⑤ a) Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ .

b) En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ .

⑥ a) Démontrer que Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)dx.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties et de I (définie en partie A), calculer cette dernière intégrale.

c) En déduire que Y admet pour espérance :

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

d) En justifiant que $Y + Z = X_1 + X_2$, en déduire également l'espérance de Z .

⑦ a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que Y^2 admet une espérance égale à 1.

b) En déduire que Y admet une variance que l'on déterminera.

⑧ a) À nouveau par intégration par parties, démontrer que Z^2 admet une espérance égale à 1.

b) En déduire que Z admet une variance que l'on déterminera.

c) Y et Z sont-elles indépendantes ?