

**CORRECTION****Equations différentielles et calcul matriciel (3H00)****Exercice :**

A savoir refaire pour s'assurer de pouvoir écrire la méthode d'Euler quand elle est demandée.

**Problème :****Première partie**

- ① a) Rappelons les relations liant la somme et le produit des racines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  aux coefficients  $a, b$  et  $c$  de l'équation (C) : Le théorème de factorisation des polynômes donne :

$$ar^2 + br + c = a(r - \omega_1)(r - \omega_2).$$

En développant le second membre, on obtient alors

$$ar^2 + br + c = a(r^2 - (\omega_1 + \omega_2)r + \omega_1\omega_2).$$

On en déduit le résultat par identification des coefficients.

$$\omega_1 + \omega_2 = -b/a \quad \omega_1\omega_2 = c/a$$

**Lu dans le rapport de jury :** « Bien sûr, question globalement réussie... 85% mais pas 100% ! Cependant, les candidats ont intérêt à prendre le temps de lire les questions... aucune preuve n'était attendue, on ne demande pas  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ ... Et le coefficient d'une équation du second degré n'est pas toujours égale à 1. »

- b) Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $y$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Posons :  $z = y' - \omega_1 y$ .

- i. Montrons que  $z$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  : Si  $y$  est de classe  $C^2$ , alors  $y'$  est de classe  $C^1$  et  $z$  est clairement  $C^1$ , en tant que combinaison linéaire de fonctions  $C^1$  et par ailleurs :

$$\begin{aligned} z' - \omega_2 z &= y'' - (\omega_1 + \omega_2)y' + \omega_1\omega_2 y \\ &= \frac{1}{a} (ay'' + by' + cy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- ii. On déduit alors une expression de  $z$  du fait que toute solution de l'équation  $z' - \omega_2 z = 0$  est de la forme  $x \mapsto \lambda e^{\omega_2 x}$ , avec  $\lambda$  un réel.

$$\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^{\omega_2 x}.$$

iii. On vient de prouver que  $y$  est solution de l'équation différentielle

$$y' - \omega_1 y = \lambda e^{\omega_2 x} \quad (\star), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Or on sait que la solution générale de l'équation homogène associée à  $(\star)$  est  $y_0 : x \mapsto \mu e^{\omega_1 x}$ . Il ne reste donc plus qu'à déterminer une **solution particulière** de  $(\star)$ .

D'après la forme du second membre, on sait que  $(\star)$  admet une solution particulière de la forme  $y_p(x) = P(x)e^{\omega_2 x}$ .

alors  $y'_p(x) = (P'(x) + \omega_2 P(x))e^{\omega_2 x}$ . Et donc :

$$y'_p(x) - \omega_1 y_p(x) = (P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x))e^{\omega_2 x} = \lambda e^{\omega_2 x}$$

Après simplification, on obtient :

$$P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x) = \lambda \quad (\star\star)$$

— *Premier cas* : Si  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $(\star\star) \Leftrightarrow P'(x) = \lambda \Rightarrow P(x) = \lambda x + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Soit  $y_p(x) = (\lambda x + b)e^{\omega_2 x} = (\lambda x + b)e^{\omega_1 x}$  une solution particulière (on peut tout à fait envisager de prendre  $b = 0$  puisque c'est une solution « particulière »...)

— *Second cas* : Si  $\omega_1 \neq \omega_2$  alors  $(\star\star) \Rightarrow \deg(P) = 0$ .

En posant  $P(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $(\star\star) \Leftrightarrow (\omega_2 - \omega_1)a = \lambda \Leftrightarrow a = \frac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}$ .

Soit, si  $y_p$  solution de  $(\star)$ , alors  $y_p(x) = \frac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1} e^{\omega_2 x}$ . On vérifie aisément que la réciproque est vraie...

$$\text{Conclusion : } y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \begin{cases} \mu e^{\omega_1 x} + \frac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1} e^{\omega_2 x} & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ (\lambda x + \mu) e^{\omega_1 x} & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

Soit :

$$\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2, y \text{ est de la forme } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}$$

et

$$\text{Si } \omega_1 = \omega_2, y \text{ est de la forme } x \mapsto (Ax + B) e^{\omega_1 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}$$

**Lu dans le rapport de jury** : « La résolution de  $z' - \omega_2 z = 0$  ne pose pas de souci (pour 75% des candidats !) même si la rédaction ne respecte pas souvent la nature des objets... confusion entre ensemble, fonction, valeur de la fonction en un point, même si les phrases utilisées sont incomplètes... «  $e^{\omega_2 x}$  est une solution ».

1/3 des candidats ne voient pas qu'alors  $y$  est solution d'une équation différentielle du premier ordre... première difficulté de deux questions qui s'enchaînent.

La recherche d'une solution particulière est plus délicate, soit par une méthode de variation de la constante à la présentation technique sans trop savoir ce qui se passe, soit par la proposition d'une solution particulière mais qui n'est pas toujours vérifiée.

Beaucoup de candidats sont passés à côté de cette équation en  $y$  et ont donné directement l'expression de  $y$  vue en cours.

Mais comme nous l'avons dit ci-dessus, la question demandait clairement de résoudre l'équation en  $y$  et ainsi de démontrer le résultat de cours. »

- c) Dans cette question, nous supposons que :  $\omega_1 = \omega_2$ . Montrons que, pour toutes constantes réelles  $A$  et  $B$ , les fonctions  $x \mapsto (Ax + B)e^{\omega_1 x}$  sont solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$  :

Soient  $A, B$  deux réels, et  $u$  la fonction définie par  $u(x) = (Ax + B)e^{\omega_1 x}$ . Le calcul de ses dérivées donne :

$$\begin{aligned} u'(x) &= Ae^{\omega_1 x} + \omega_1(Ax + B)e^{\omega_1 x} \\ u''(x) &= 2\omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_1^2(Ax + B)e^{\omega_1 x} \end{aligned}$$

On en déduit alors, pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} au''(x) + bu'(x) + cu(x) &= e^{\omega_1 x} (Ax (a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + B (a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + A(2a\omega_1 + b)) \\ &= e^{\omega_1 x} (AxP(\omega_1) + BP(\omega_1) + AP'(\omega_1)) \end{aligned}$$

où on a posé  $P(r) = ar^2 + br + c$ . Mais lorsque  $\omega_1 = \omega_2$ , dire que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les racines de  $P$  c'est dire que  $\omega_1$  est une racine double de  $P$ . Cela donne  $P(\omega_1) = P'(\omega_1) = 0$ , ce qui donne le résultat recherché.

Pour tous réels  $A$  et  $B$ , les fonctions  $x \mapsto (Ax + B)e^{\omega_1 x}$  sont solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Déduisons-en l'ensemble  $S'_2$  des solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$  :

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$\text{Vect}(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}) \subset S'_2.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de  $S'_2$  est de la forme  $x \mapsto Axe^{\omega_1 x} + Be^{\omega_1 x}$ , mais on remarque que cela a été fait à la question précédente. D'où le résultat.

Si  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $S'_2 = \text{Vect}(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x})$

**Lu dans le rapport de jury :** « Les calculs ont été laborieux...

Et le schéma analyse-synthèse ou double inclusion n'a pas été mis en avant (environ 5% des candidats sont convainçants!), beaucoup se demandent pourquoi on leur fait faire deux fois la même chose.

»

- d) Dans cette question, nous supposons que :  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Montrons que pour toutes constantes réelles  $A$  et  $B$ , les fonctions  $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$  sont solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$  et déduisons-en l'ensemble  $S'_2$  des solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$  dont on admettra qu'il s'agit là aussi d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

Soient  $A, B$  deux réels, et  $u$  la fonction définie par  $u(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ . Le calcul de ses dérivées donne :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2 Be^{\omega_2 x} \\ u''(x) &= \omega_1^2 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2^2 Be^{\omega_2 x} \end{aligned}$$

On en déduit alors, pour tout réel  $x$  :

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = Ae^{\omega_1 x} (a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + Be^{\omega_2 x} (a\omega_2^2 + b\omega_2 + c) = 0.$$

D'où le résultat recherché.

Pour tous réels  $A$  et  $B$ , les fonctions  $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$  sont solutions de  $(\varepsilon'_2)$  sur  $\mathbb{R}$ .

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$\text{Vect}(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}) \subset S'_2.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de  $S'_2$  est de la forme  $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ , mais on remarque que cela a été fait à la question 1.2. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2, S'_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})}$$

e) Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' - y = xe^x$  :

Il suffit d'utiliser la méthode qui vient d'être établie, en remarquant que l'équation caractéristique associée admet 1 et  $-1$  comme racines.

**Conclusion :**  $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } \{x \mapsto Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$   
ou encore :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}).}$$

Cherchons maintenant une solution particulière  $y_p$  : Conformément à l'indication de l'énoncé, on

cherche  $y_p$  sous la forme  $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ .

☞ On peut prendre  $c = 0$  puisque  $x \mapsto ce^x$  est solution de l'équation homogène !

Alors :

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= (2ax + b + ax^2 + bx)e^x \\ &= (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} y''_p(x) &= (2ax + (2a + b) + ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ &= (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{aligned}$$

D'où :

$$y''_p(x) - y_p(x) = xe^x \Leftrightarrow (4ax + 2a + 2b)e^x = xe^x$$

ou encore

$$4ax + 2a + 2b = x \text{ (multiplication par } e^{-x} \neq 0)$$

Et par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 4a &= 1 \\ 2a + 2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1/4 \\ 2b &= -2a = -1/2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire que  $y_p : x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x$  est solution particulière de l'équation différentielle proposée.

**Conclusion :**  $\boxed{\mathcal{S} = \{y = y_0 + y_p : x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right)e^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$

## Deuxième partie

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.

Pour une fonction  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $y^{(3)}$  désigne la dérivée troisième de  $y$ .

Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon'_3) \quad y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit  $y$  une solution de  $(\varepsilon'_3)$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $x$  un nombre réel.

$$\text{Notons : } Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que  $Y' = AY$  : On a

$$Y' = AY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

On voit alors que cette égalité est vraie, puisque  $y$  est solution de  $(\varepsilon'_3)$ .

$$\boxed{Y' = AY}$$

② Quelques calculs préalable :

$$\text{a) Soit } (S_\lambda) \text{ le système linéaire d'inconnues réelles } x, y \text{ et } z : \begin{cases} (2 - \lambda)x + y - 2z & = 0 \\ x - \lambda y & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases}$$

i. Montrons qu'il existe 3 valeurs de  $\lambda$  distinctes (nommées par la suite  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ , avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ) pour lesquelles  $(S_\lambda)$  n'admet pas que la solution nulle :

$$(S_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \lambda z \\ x = \lambda y & = \lambda^2 z \\ ((2 - \lambda)\lambda^2 + \lambda - 2)z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \lambda z \\ x = \lambda y & = \lambda^2 z \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1)z & = 0 \end{cases}$$

Il est dès lors immédiat que  $(S_\lambda)$  admet au moins une solution non nulle si, et seulement si,  $(2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0$ .

**Conclusion :**  $(S_\lambda)$  n'est pas un système de Cramer pour  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 1, 2)$

ii. Résolvons  $(S_\lambda)$  pour chacune des valeurs de  $\lambda$  obtenues précédemment :

Déterminons l'ensemble des solutions de  $(S_{-1})$  :

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow (x = z \text{ et } y = -z), \text{ donc } \mathcal{S}_{S_{-1}} = \{(z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

de même :  $\mathcal{S}_{S_1} = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathcal{S}_{S_2} = \{(4z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

iii. Soit  $u_1 = (a_1, b_1, 1)$  une solution de  $(S_{\lambda_1})$ ,  $u_2 = (a_2, b_2, 1)$  une solution de  $(S_{\lambda_2})$  et  $u_3 = (a_3, b_3, 1)$  une solution de  $(S_{\lambda_3})$ . Déterminer  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3$  et  $b_3$  :

C'est immédiat au regard de la question précédente. on prendra :

$$u_1 = (1, -, 1, 1), u_2 = (1, 1, 1) \text{ et } u_3 = (4, 2, 1)$$

b) On pose  $P = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Inversons la matrice  $P$  et déterminons la matrice  $D$  définie par  $D = P^{-1}AP$  :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ x - y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ 2x + 6z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3z = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c \\ x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ z = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Un calcul matriciel immédiat donne alors  $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Lu dans le rapport de jury :** « Quelques remarques habituelles sur cette question : présentations mécaniques qui laissent parfois des doutes sur la compréhension, confusion entre taille, dimension, ordre et rang d'une matrice, les colonnes de  $P$  ne sont pas toujours ordonnées, le calcul de l'inverse de  $P$  est correct dans 50% des cas... »

③ Soit  $y$  une solution de  $(\varepsilon'_3)$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrons que :  $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$  :

On vient d'obtenir que  $D = P^{-1}AP$  donc, en multipliant à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$ , on a successivement :

$$PD = AP \text{ puis } PDP^{-1} = A$$

Dès lors :

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par  $P^{-1}$  à gauche.

$$P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$$

**Lu dans le rapport de jury :** « Trop souvent traitée en effectuant le calcul matriciel... »

④ Résolution de  $(\varepsilon'_3)$  sur  $\mathbb{R}$ .

a) Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de  $(\varepsilon'_3)$  sur  $\mathbb{R}$ , s'il en existe.

En notant  $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$ , montrons que  $z$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $z' = z$ , et déduisons-en une expression de  $z$  :

$y$  étant une solution de  $(\varepsilon'_3)$ , on en déduit qu'elle est de classe  $C^1$ . Il vient alors que  $z$  est de classe  $C^3$  en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe  $C^1$ . On peut alors écrire :

$$z' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}(2y'' + y' - 2y) + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = z.$$

$z$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  de sorte que  $z' = z$ .

On en déduit qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $z(x) = \lambda e^x$ , pour tout réel  $x$ .

Il existe un réel  $\lambda$  tel que  $z(x) = \lambda e^x$ , pour tout réel  $x$ .

En déduire une expression de  $y$  comme combinaison linéaire de 3 fonctions qu'on déterminera :

On vient de prouver que  $y$  vérifie l'équation différentielle  $-\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = \lambda e^x$ , soit encore

$$(\dagger) \quad -y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à  $(\dagger)$  est  $-r^2 + r + 2 = 0$ , qui admet pour racines  $-1$  et  $2$  (après calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à  $(\dagger)$  est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

Quant à la solution particulière, on la cherche sous la forme  $y_p(x) = \alpha e^x$  (ou plus généralement, sous la forme  $y_p(x) = P(x)e^x$  si on n'a pas idée du degré de  $P...$ ). Pour déterminer la valeur de  $\alpha$ , il suffit de remarquer que l'on a

$$-y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha e^x,$$

ce qui donne  $\alpha = \lambda$  après calcul des dérivées de  $y_p$ . Au final, on voit que  $y$  est de la forme  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ .

Il existe trois réels  $A, B, \lambda$  tels que  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ .

b) Déterminons alors l'ensemble  $S'_3$  des solutions de  $(\varepsilon'_3)$  sur  $\mathbb{R}$  :

On vient de prouver que toute solution de  $(\varepsilon'_3)$  est de la forme  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ , ce qui prouve :

$$S'_3 \subset \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x).$$

Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de la forme  $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$  est bien une solution de  $(\varepsilon'_3)$ , ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= (-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - 2(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - (-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad + 2(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$S'_3 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$$

**FIN**