

Devoir : Algèbre matricielle et équations différentielles (3h00)

Le devoir se compose d'un exercice et d'un problème.

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice **n'est pas** autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice :

Le modèle de Gompertz est un modèle de dynamique de populations qui choisit de moduler le taux de croissance *per capita* r de façon logarithmique en proposant l'équation différentielle :

$$N'(t) = r \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right) N(t) \quad (\mathcal{G})$$

Écrire une fonction Python `eulerExplicite(t0, tf, N0, h)` qui **trace** sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ une approximation de la solution de $(\mathcal{G})$ vérifiant $N(t_0) = N_0$ en subdivisant l'intervalle $[t_0, t_f]$ en n segments de même longueur h .

Rappel : La méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu en utilisant de proche en proche l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point.

En tout point a , $\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a)$ lorsque h est petit (positif ou négatif).

Problème :

Le problème comporte deux parties qui traitent toutes de la résolution d'équations différentielles par des méthodes différentes. Ces parties sont donc totalement indépendantes.

Première partie

- ① L'objectif de cette question est de justifier dans certains cas, la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels avec a non nul, et considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon'_2) \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où y est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Nous savons que la résolution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est basée sur les solutions de l'équation numérique $(\mathcal{C}) \quad ar^2 + br + c = 0$, dite *équation caractéristique associée* à (ε'_2) .

Nous allons retrouver la forme générale des solutions de (ε'_2) en nous limitant au cas où l'équation $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles notées ω_1 et ω_2 non nécessairement deux à deux distinctes.

- a) Rappeler les relations liant la somme et le produit des racines ω_1 et ω_2 aux coefficients a, b et c de l'équation $(\mathcal{C})$.

b) Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (ε'_2) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Posons : $z = y' - \omega_1 y$ ($\star$).

- i. Montrer que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z' - \omega_2 z = 0$.
- ii. En déduire une expression de z .
- iii. Dédurre de ($\star$) une expression de y en montrant que, suivant les cas, y s'écrit $x \mapsto (Ax + B)e^{\omega_1 x}$ ou $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, A et B étant deux constantes réelles.

✍ *Remarque : Pour cette dernière question on sera amené à distinguer les cas où $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$ après avoir supposé qu'une solution particulière prend la forme $y_p(x) = P(x)e^{\omega_2 x}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.*

c) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 = \omega_2$. Montrer que, pour toutes constantes réelles A et B , les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{\omega_1 x}$ sont solutions de (ε'_2) sur $\mathbb{R}$.
En déduire l'ensemble S'_2 des solutions de (ε'_2) sur $\mathbb{R}$.

d) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 \neq \omega_2$.

Montrer que pour toutes constantes réelles A et B , les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de (ε'_2) sur $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble S'_2 des solutions de (ε'_2) sur $\mathbb{R}$.

e) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - y = xe^x$.

✍ *Indication : On pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'une fonction $y_p(x) = P(x)e^x$ où $P \in \mathbb{R}_2[X]$.*

Deuxième partie

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.

Pour une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y .

Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon'_3) \quad y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε'_3) sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

$$\text{Notons : } Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que : $Y' = AY$.

② Quelques calculs préalable :

$$\text{a) Soit } (S_\lambda) \text{ le système linéaire d'inconnues réelles } x, y \text{ et } z : \begin{cases} (2 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

- i. Montrer qu'il existe 3 valeurs de λ distinctes (nommées par la suite λ_1, λ_2 et λ_3 , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) pour lesquelles (S_λ) n'admet pas que la solution nulle.
- ii. Résoudre (S_λ) pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment.
- iii. Soit $u_1 = (a_1, b_1, 1)$ une solution de (S_{λ_1}) , $u_2 = (a_2, b_2, 1)$ une solution de (S_{λ_2}) et $u_3 = (a_3, b_3, 1)$ une solution de (S_{λ_3}) .
Montrer que $a_1, b_1 = 1, -1$, $a_2, b_2 = 1, 1$ et $a_3, b_3 = 4, 2$ conviennent.

$$\text{b) On pose } P = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverser la matrice P et déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

③ Soit y une solution de (ε'_3) sur $\mathbb{R}$.

Montrer que : $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$.

④ **Résolution de (ε'_3) sur $\mathbb{R}$.**

a) Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (ε'_3) sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.

En notant $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$, montrer que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z' = z$, et en déduire une expression de z .

✎ Remarque : Nous n'avons pas de condition à l'origine et on ne cherchera pas à déterminer la constante.

En déduire une expression de y comme combinaison linéaire de 3 fonctions qu'on déterminera.

b) Déterminer alors l'ensemble S'_3 des solutions de (ε'_3) sur $\mathbb{R}$.