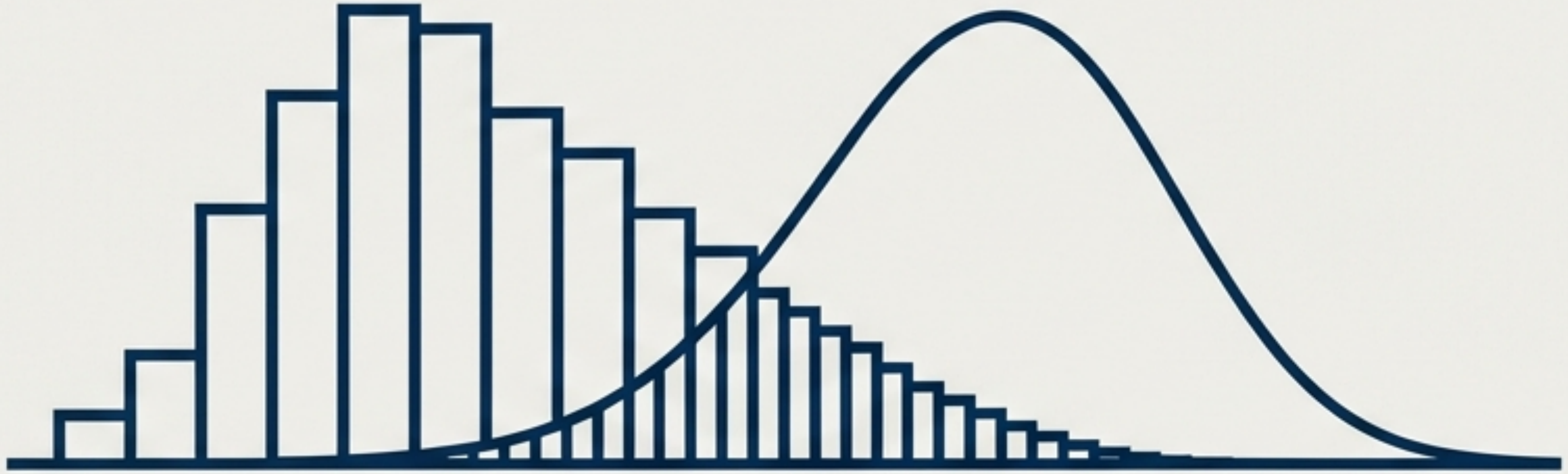
Variables Aléatoires à Densité : Théorie & Pratique



BASÉ SUR LE CHAPITRE 8 ET LE TD 12 — MATHÉMATIQUES BCPST/CPGE

Le Concept Fondamental

L'Aire comme Probabilité

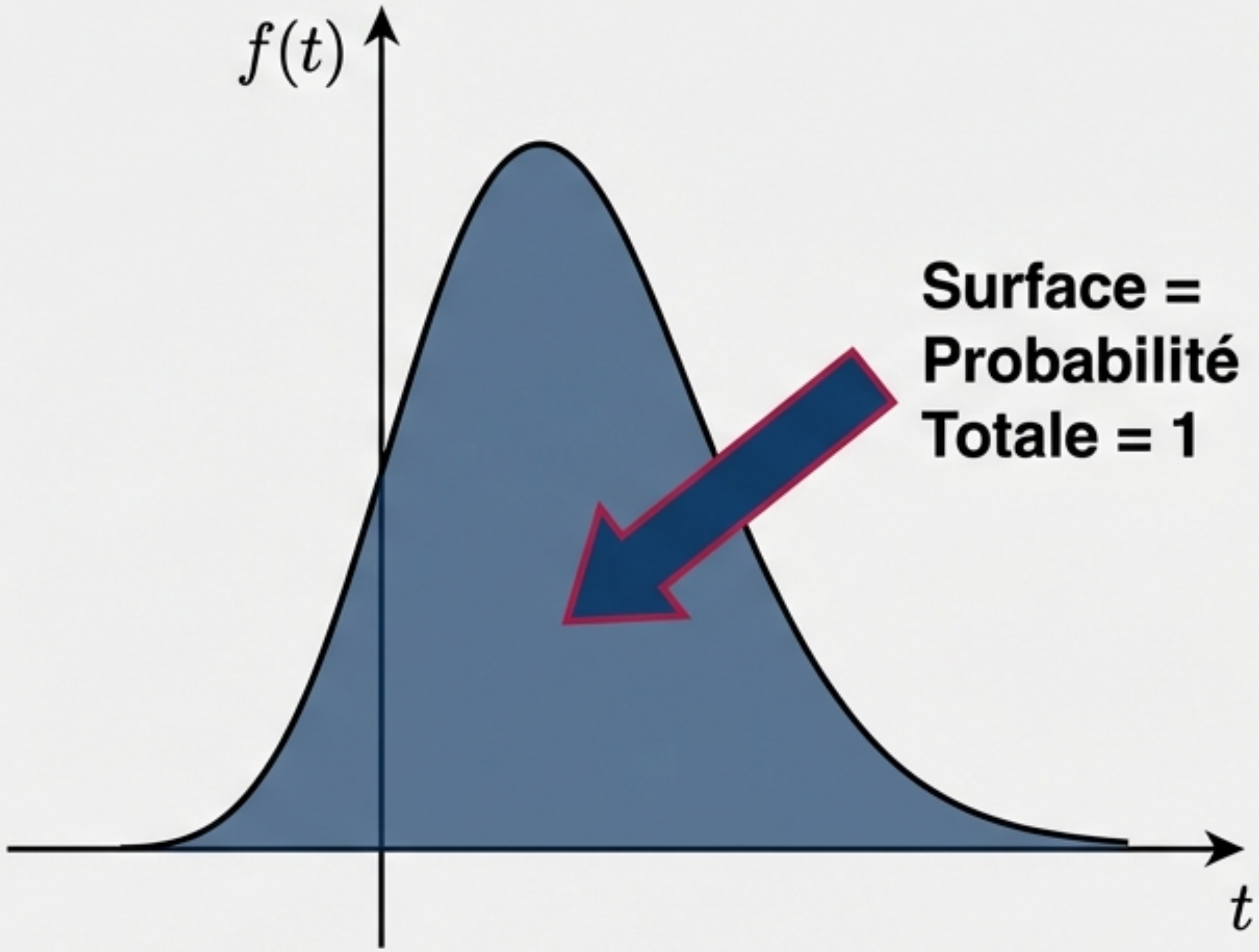
Une fonction f est une densité de probabilité si :

1. Positive : $f(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$
2. Continue : Sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. Normalisée : L'aire totale vaut 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Attention : Pour une variable continue, la probabilité d'un point précis est nulle.

$$P(X = a) = 0$$



Le Lien Clé : Densité vs Fonction de Répartition

Densité
$f(x)$

INTÉGRATION

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Fonction de Répartition $F_X(x)$

DÉRIVATION

$$f(x) = F'_X(x)$$

Propriétés de F_X :

- Croissante sur $\mathbb{R}$
- Continue sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{-\infty} F = 0$
- $\lim_{+\infty} F = 1$

Calculer les Probabilités sur un Intervalle

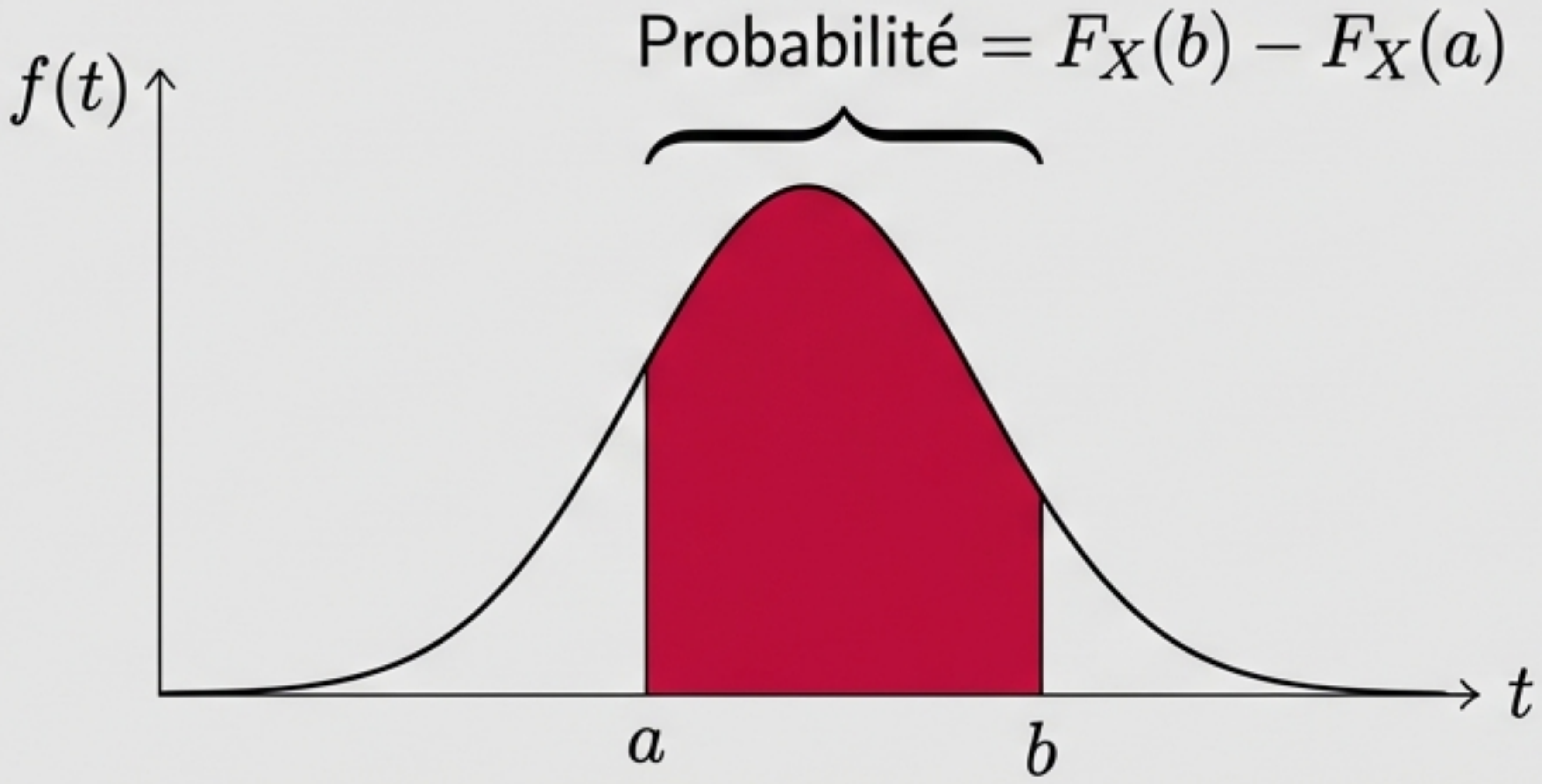
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Règle d'Or

En continu, les inégalités strictes sont équivalentes aux inégalités larges :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

Queue de distribution $\quad P(X > a) = 1 - F_X(a)$



Les Mesures : Espérance & Variance

L'Espérance (Le Centre)

Définition :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Condition impérative :

- L'intégrale doit converger absolument.

Le Théorème de Transfert

Pour calculer $E(u(X))$ sans connaître la loi de $u(X)$:

$$E(u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) f(t) dt$$

Linéarité :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

La Variance (La Dispersion)

Formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

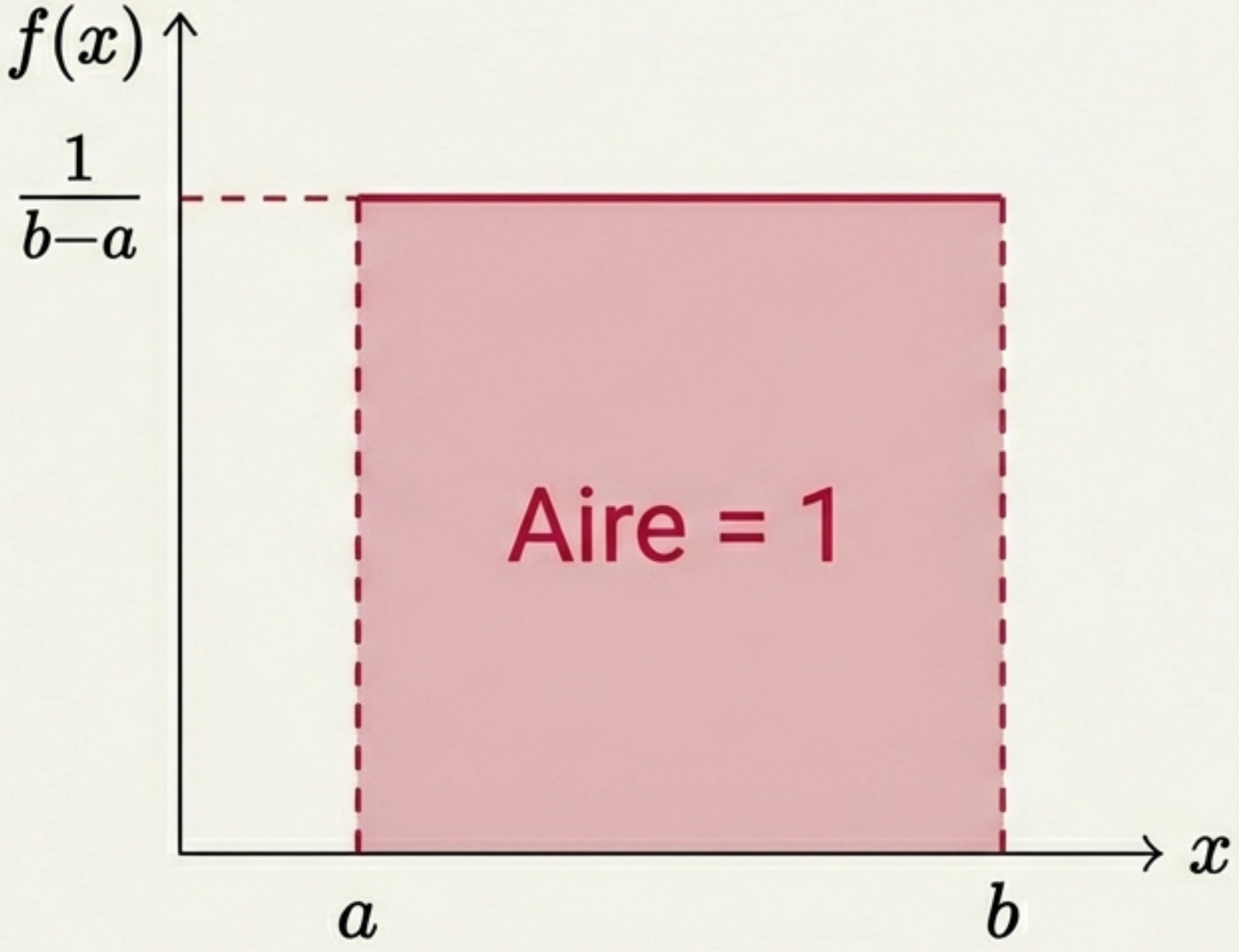
Centrage et Réduction :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Loi Usuelle 1 : La Loi Uniforme $\mathcal{U}[a,b]$

L'aléa pur sur un intervalle borné.

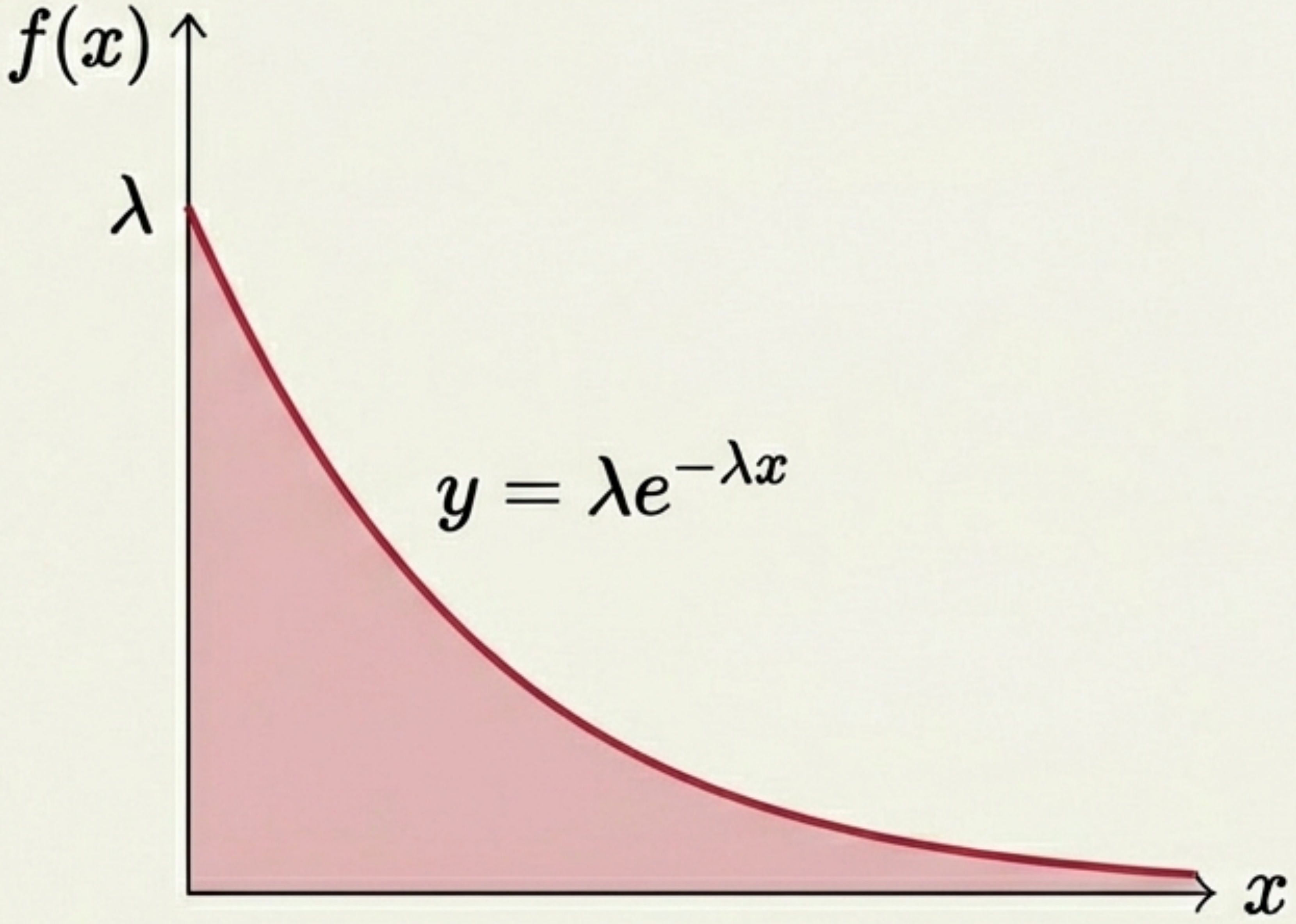
Densité :	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
Espérance :	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
Variance :	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Python :	random.random() simule $\mathcal{U}[0,1]$



Loi Usuelle 2 : La Loi Exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$

Modélisation des durées de vie et temps d'attente.

Densité :	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$
Espérance :	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
Variance :	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$



Propriété Clé : Absence de Mémoire

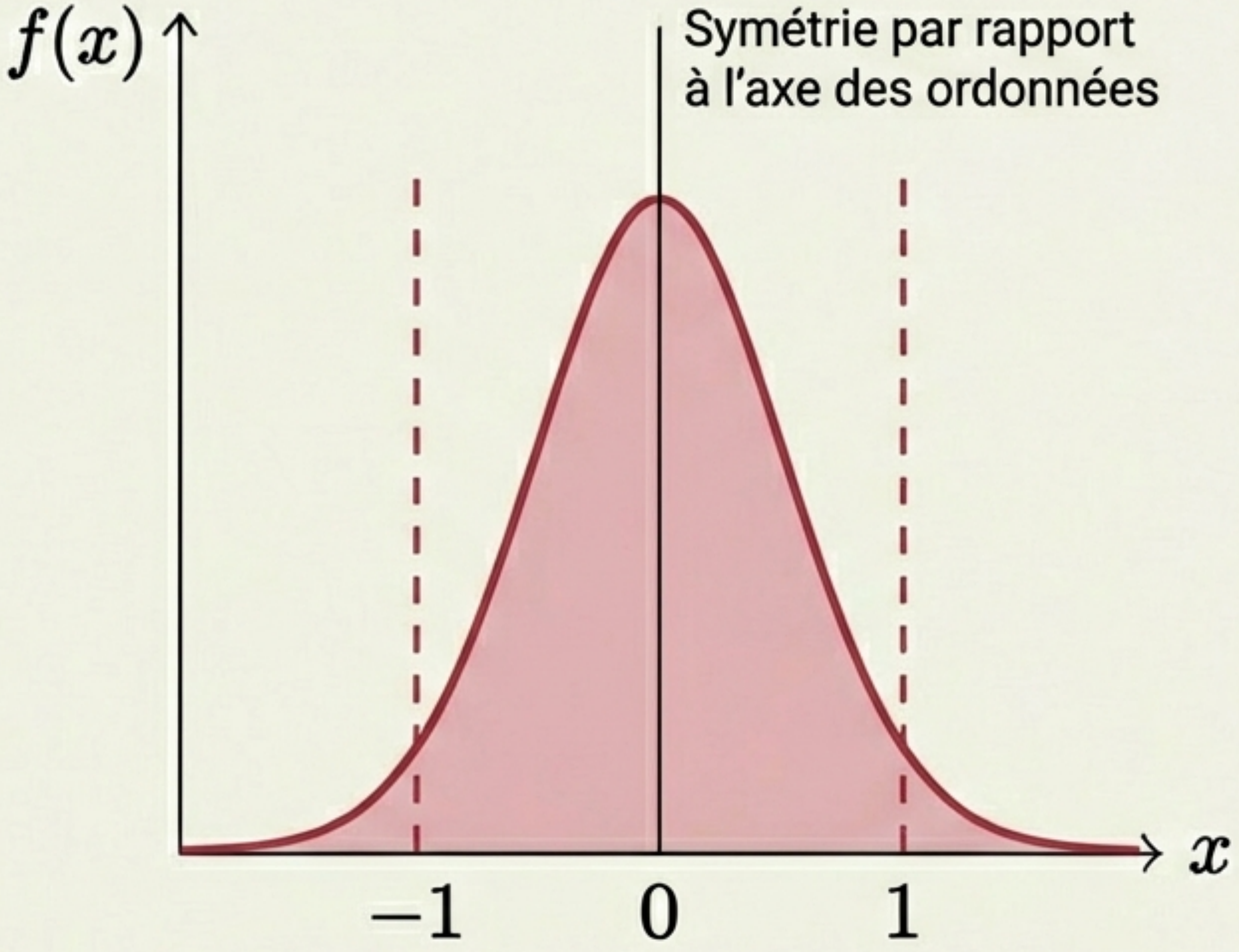
$$P_{X \geq s}(X \geq s + t) = P(X \geq t)$$

(Le système ne vieillit pas)

Loi Usuelle 3 : La Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

La courbe en cloche fondamentale.

Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0,1)$	
Densité :	$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
Symétrie :	$\varphi(-x) = \varphi(x)$
Passage au cas général : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :	
$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	



Méthode : Trouver la loi de $Y = u(X)$

Algorithme de résolution pas à pas

1. Déterminer le Support
Trouver l'ensemble des valeurs $Y(\Omega)$.
Exemple : Si $X \in \mathbb{R}$ et $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

2. Fonction de Répartition
Exprimer $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ en fonction de F_X.
$F_Y(y) = \mathbb{P}(u(X) \leq y)$
Inversez l'inégalité pour isoler X.

3. Obtenir la Densité
Dériver F_Y pour trouver f_Y.
$f_Y(y) = F'_Y(y)$
Attention aux indicatrices !

Systèmes Multiples : Minimum et Maximum

Pour des variables indépendantes $X_1, ..., X_n$

Le Maximum : $Y = \max(X_i)$

Concept: Le système fonctionne tant qu'au moins UN composant fonctionne.

Formule:

$$F_{\max}(x) = \mathbb{P}(\max(X_i) \leq x)$$

$$F_{\max}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

(Produit des Fonctions de Répartition)

Le Minimum : $Z = \min(X_i)$

Concept: Le système s'arrête dès que le PREMIER composant lâche.

Formule:

$$1 - F_{\min}(x) = \mathbb{P}(\min(X_i) > x)$$

$$1 - F_{\min}(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$$

(Produit des Fonctions de Survie)

Sommes de Variables Indépendantes

Le Produit de Convolution

Pour $S = X + Y$ avec densités f_X et f_Y :

$$f_S(t) = (f_X * f_Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx$$

Stabilité de la Loi Normale

La somme de variables Gaussiennes reste Gaussienne.

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors :

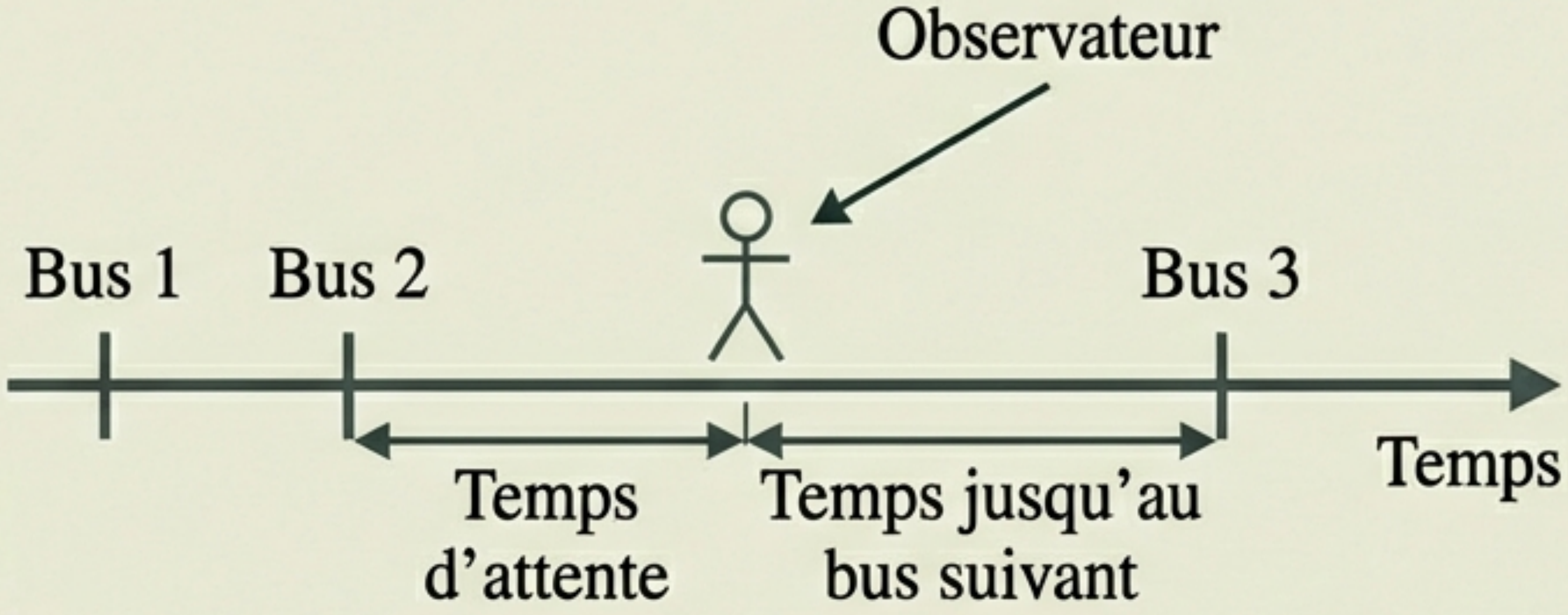
$$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Attention : Les variances s'additionnent (σ^2), pas les écarts-types (σ) !

Paradoxe : Le Temps d'Attente du Bus

Lien entre Loi Exponentielle et Poisson (Td11 - Exercice 11)

$$\boxed{(N_t \geq n) = (S_n \leq t)}$$



Le Paradoxe :

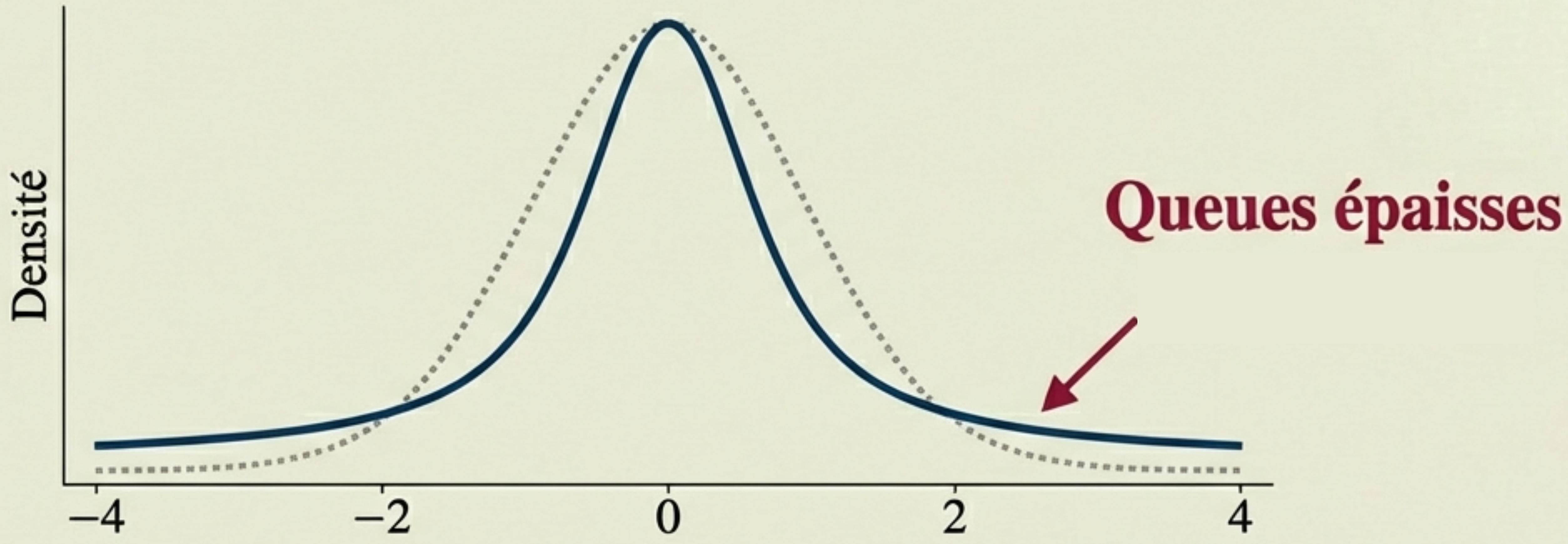
- Moyenne théorique entre bus = 10 min.
- Moyenne de l'intervalle "Bus précédent / Bus suivant" pour l'observateur = 20 min.

Explication :

- L'observateur a plus de probabilité de tomber dans un grand intervalle.

Attention aux Pièges : La Loi de Cauchy

Quand l'espérance n'existe pas



Densité :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Problème :

L'intégrale $\int |t| f(t) dt$ diverge.

Cette variable n'a pas d'espérance mathématique.

Leçon : Toujours vérifier la convergence absolue.

Simulation Numérique avec Python

La Base

Générateur uniforme :

```
u = random.random()  # Simule 𝒰[0,1]
```

```
U = (b - a)*rd.random() + a    # Simule U[a, b]
```

```
U = norm.ppf(rd.random())    # Simule N(0, 1)
```

Exemple (**Loi Exponentielle**) :

```
import math, random
lambda_param = 0.5
u = random.random()
x = - (1 / lambda_param) * math.log(1 - u)
```

Méthode d'Inversion

Simuler X à partir de U via la réciproque de la fonction de répartition :

$$X = F^{-1}(U)$$

Exemple : **Loi exponentielle ;**
Loi normale centrée réduite

Bibliothèques Scientifiques

Utilisation de scipy.stats :

```
from scipy.stats import norm
p = norm.cdf(1.96) # Fonction de répartition
d = norm.pdf(0)    # Densité
```