



- X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. « Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X , c'est justifier que X admet une densité et en donner une ».
- Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
- Espérance, théorème de transfert et inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments.
- Lois usuelles : Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
- Somme de variables aléatoires à densité indépendantes, la formule du produit de convolution devant être rappelée en cas de besoin.

Exercice 1 : ★

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour chaque fonction f ci-dessous, déterminer la valeur de la constante $\lambda > 0$ pour que f soit une densité de probabilité.
Déterminer la fonction de répartition associée et donner son graphe.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \lambda x \mathbf{1}_{]0,1[}(x); & b) f(x) &= \lambda x(1-x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x); & c) f(x) &= \lambda(2-|x|) \mathbf{1}_{[-2,2]}(x); \\ d) f(x) &= \frac{\lambda}{x^n} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x); & e) f(x) &= \frac{\lambda}{1+n^2 x^2}; \end{aligned}$$

Exercice 2 : ★★

k étant un réel donné, on considère l'application f définie pour tout x réel par $f(x) = k \cos(x) \mathbf{1}_{[0, \pi/2]}(x)$.

- ① Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
- ② Soit X , variable aléatoire de densité f . Déterminer sa fonction de répartition, l'espérance et la variance de X .
- ③ Soit $Y = \tan(X)$.

- a. Montrer que $\sin(\arctan(y)) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.
- b. Déterminer la fonction de répartition de Y .
- c. Calculer l'espérance de Y si elle existe.

Exercice 3 ★★ : (oral 2021)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

- ① Montrer que f est une densité de variable aléatoire réelle.
Soit X , variable aléatoire de densité f . Déterminer sa fonction de répartition F .
- ② a. Justifier que F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et que sa fonction réciproque est donnée par :

$$\forall y \in]0, 1[, F^{-1}(y) = \ln \left(\frac{y}{1-y} \right)$$

- b. En déduire que si U est une loi uniforme sur $]0, 1[$, alors X a même loi que $\ln \left(\frac{U}{1-U} \right)$.
- c. Écrire un programme Python permettant d'obtenir une estimation de l'espérance de X en cas d'existence.

- ③ a. Justifier que l'intégrale $\int_0^\infty t f(t) dt$ est convergente.
 b. Montrer que la fonction f est paire.
 c. En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$.
- ④ On admet que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{t}{1+e^t} dt$ est convergente et on note I sa valeur.
 Montrer que X admet une variance $\mathbb{V}(X)$, et l'exprimer en fonction de I à l'aide d'une intégration par parties.
- ⑤ Soit g définie par $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Déterminer sa fonction réciproque g^{-1} .
- ⑥ On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$. Déterminer la fonction de répartition de Y . Calculer, s'ils existent, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 4 : ★★

Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- ① Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
 ② Quelle est la loi suivie par $Y = X^2$?
 ③ Calculer l'espérance et la variance de X . Généraliser ce résultat en calculant le moment d'ordre r quelconque.

Exercice 5 : ★

En supposant que X , Y et Z suivent la loi uniforme sur $]0, 1[$ et sont indépendantes, déterminer la loi de $X + Y + Z$.

Exercice 6 : ★★★ (oral Agro-véto 2015)

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles à densité et indépendantes, alors $S + T$ est une variable à densité dont une densité est donnée, sous réserve de convergence de l'intégrale, par la formule :

$$f_{S+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t) dt$$

Préliminaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

- ① Montrer que les p_k définissent les coefficients d'une loi de probabilité.
 Par la suite, si N est une variable aléatoire discrète telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(N = k) = p_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, alors on dira que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

- ② $\mathbb{E}(N)$ existe si la série $\sum k \mathbb{P}(N = k)$ converge absolument et dans ce cas elle vaut : $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(N = k)$.

Montrer que $\mathbb{E}(N)$ existe et donner sa valeur.

Première partie :

- ① Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$ et soit λ un réel strictement positif.
 On note $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- ② On note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X . On note $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Montrer que pour $n \geq 1$, S_n admet pour densité la fonction f_n donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Deuxième partie : On suppose qu'à un arrêt de bus, les différences entre les temps de passage successifs d'un autobus sont indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre λ .

On définit un instant 0, puis on note $S_1, S_2, \dots$ les temps de passages successifs des autobus. On note alors, pour $t > 0$, N_t la variable égale au nombre d'autobus qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t à l'arrêt de bus. Autrement dit on a : $\forall n \geq 0, (N_t = n) = (S_n \leq t < S_{n+1})$.

- ① Pour $n \geq 0$, exprimer l'événement $(N_t \geq n)$ à l'aide de la variable S_n . Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$

- ② En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

- ③ On suppose désormais que les temps de passages entre deux autobus ont pour moyenne 10 minutes et qu'un étudiant en BCPST arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ pour prendre le bus. Il se pose la question de savoir combien de temps, en moyenne, il devra attendre le prochain bus mais aussi combien de temps en moyenne s'écoule entre le prochain bus et celui qui l'a précédé. Pour y répondre, il écrit rapidement le programme Python suivant :

```
from math import log
from random import random

def autobus():
    a = 0 ; b = 0 ; N = 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100 :
            r = s
            s = s - 10*log(random())
        u = s-100 ; v = s-r
        a = a+u ; b = b+v
    print(a/N,b/N)
```

- ④ Expliquer ce que représentent les variables r , s , u et v dans le programme.
- ⑤ Le programme affiche finalement les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494
En quoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

Exercice 7 : Oral Agro-véto 2019

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

-    Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
- b. En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n .
- c. En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

-    On note F_n la fonction de répartition de Y_n .
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n .

-    a. Montrer que pour tout réel $u \in [0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu$$

- b. En déduire que l'intégrale $\int_0^\infty (1 - F_n(x))dx$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

-    a. Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A))$$

- b. En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$$

-    A l'aide du changement de variables $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt$$

En déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n$$