10 T.D. Intégrales généralisées.

- Convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert (✐ « La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive »). Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres. Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leq g$.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 1 ✶ :

Dire dans chacun des cas suivants si l'intégrale est impropre. Si oui, étudier sa nature et donner sa valeur en cas de convergence.
✐ *Remarques :* On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'intégrale dans les cas b) et h), pour e) et g) une IPP permet d'obtenir la valeur de I et, pour f) et i), on pourra faire les changements de variables respectifs :$t = \sqrt{x}$ et $u = \ln(t)$).

$$a)I = \int_0^{\infty} te^{-t}dt; \quad b)I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt; \quad c)\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}; \quad d)I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt$$

$$e)I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}; \quad f)I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad g)I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}dt; \quad h)I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

$$i)I = \int_0^{+\infty} \cos(\ln(t))dt; \quad j)I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt; \quad k)I = \int_1^{+\infty} e^{-2t^2+4t-1}dt$$

Exercice 2 ✶✶ :

① Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

② Démontrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{1+x^2}dx$ convergent.

③ En déduire la convergence et la valeur de $I = \int_0^{\infty} \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}dx$.

Exercice 3 ✶ :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arctan(1+x) - \arctan(x)$.

① Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

② A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que $\forall x \geq 1,\ f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ est convergente.

③ Pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que $\displaystyle\int_A^B f(t)dt = \int_B^{B+1} \arctan(t)dt - \int_A^{A+1} \arctan(t)dt$.

④ En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut π.

Exercice 4 ✶ :

p et λ désignent deux réels strictement positif et $I(p, \lambda) = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$.

On note par ailleurs $\Gamma(p) = I(p, 1)$.

① Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$ puis montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\displaystyle\int_0^a x^{p-1}dx$ converge (✐ *remarque :* on pensera à distinguer le cas $p \geq 1$ du cas $0 < p < 1$).
En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne zéro.

② Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{p+1}e^{-\lambda x}$ et en déduire que pour x suffisamment grand, $0 \leq x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq \dfrac{1}{x^2}$.
En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne $+\infty$.

③ En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{u}{\lambda}$, montrer que $I(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

④ Calculer $\Gamma(1)$ et montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$.
En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

⑤ Soit g définie par $g(u) = 0$ si $u \leq 0$ et $g(u) = \dfrac{1}{\Gamma(p)}\lambda^p u^{p-1} e^{-\lambda u}$ sinon.

On dira qu'une fonction f est une *densité de probabilité* si f est continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, f est positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Montrer que g est une densité de probabilité.

⑥ Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2 g(u)du$ convergent et calculer leurs valeurs.