

**Exercice 4 ★ :**

$p$  et  $\lambda$  désignent deux réels strictement positif et  $I(p, \lambda) = \int_0^\infty \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$ .

On note par ailleurs  $\Gamma(p) = I(p, 1)$ .

- ① Par hypothèse,  $\lambda > 0$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $-\lambda x < 0$  et donc  $e^{-\lambda x} < 1$  car la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, pour tout  $p \in \mathbb{R}_+^*$   $x^{p-1} > 0$  si  $x > 0$ .

**Conclusion :**  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}}$

Il s'agit de désormais de montrer la convergence de l'intégrale  $I(p, \lambda)$  à la borne zéro, autrement dit de montrer que  $\int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  converge pour tout  $a$  réel, strictement positif.

On peut distinguer deux cas :

- Si  $p \geq 1$  : la fonction  $x \mapsto \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  par produit de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Dès lors  $\int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale définie.
- Si  $0 < p < 1$  : la fonction  $x \mapsto \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  car  $x \mapsto x^{p-1}$  n'est pas continue en 0.  
L'intégrale  $\int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  est donc généralisée à la borne 0.

Mais d'après la première partie de la question :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$$

et  $\int_0^a x^{p-1} dx$  converge. En effet :

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^a x^{p-1} dx = \left[ \frac{x^p}{p} \right]_\varepsilon^a = \frac{a^p}{p} - \frac{\varepsilon^p}{p}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = \frac{a^p}{p} \text{ puisque } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^p = 0 \text{ pour tout } p > 0$$

D'où  $\int_0^a x^{p-1} dx$  converge et vaut  $\frac{a^p}{p}$ .

Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison d'intégrales de fonctions positives :

$$\int_0^a x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \text{ converge.}$$

Et comme l'ensemble des intégrales convergentes sur  $]0, a]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on a :

$$\lambda^p \int_0^a x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \text{ converge et vaut } \int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$$

**Conclusion :**  $\boxed{\text{On dira que } \int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \text{ converge pour tout } p > 0}$

- ②  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p+1} e^{-\lambda x} = 0$  car  $x^{p+1} = o(e^{\lambda x})$ .

Dès lors, par définition de la limite en  $+\infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0 / \forall x \geq c, |x^{p+1} e^{-\lambda x}| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour  $\varepsilon = 1$  :

$$\exists c > 0 / \forall x \geq c, 0 \leq x^{p+1} e^{-\lambda x} \leq 1 \text{ puisque } x^{p+1} e^{-\lambda x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

En divisant de chaque coté par  $x^2$  qui est positif, on obtient que  $\forall x \geq c, 0 \leq x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{x^2}$ .

On montre alors que  $J = \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  converge. En effet :

$$J(x) = \int_c^x \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_c^x = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = \frac{1}{c}.$$

Soit  $J$  converge et vaut  $\frac{1}{c}$ .

D'où, d'après le théorème de convergence par comparaison de fonctions positives :  $\int_c^{+\infty} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  converge.

Comme par ailleurs la fonction  $x \mapsto x^{p-1} e^{-\lambda x}$  est continue sur  $[a, c]$ , on conclue que  $\int_a^{+\infty} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  converge.

On vient de montrer que  $I(p, \lambda)$  converge à la borne  $+\infty$ .

Par application de la relation de Chasles, on a d'après les questions 1. et 2 :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx + \int_a^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \text{ converge}$$

**Conclusion :**  $I(p, \lambda)$  converge pour tout  $p > 0$  et tout  $\lambda > 0$ .

- ③ On nous demande d'effectuer le changement de variable  $x = \frac{u}{\lambda}$ .

*Formalisons la question :* Soit  $\varphi : x \mapsto \lambda x = u$  la fonction de changement de variable.

Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement croissante car  $\lambda > 0$ .

Puisque  $I(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$  converge d'après la question 2., nous sommes assurés que :

$$J(p, \lambda) = \int_\alpha^\beta \lambda^p \frac{u^{p-1}}{\lambda^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{\lambda} \text{ où } \alpha = \varphi(0) = 0 \text{ et } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty \text{ converge}$$

et

$$I(p, \lambda) = J(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du = \Gamma(p)$$

- ④ Calculons  $\Gamma(1)$  : Par définition  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

On reconnaît une intégrale de référence et pour montrer sa convergence on peut écrire que :

$$\Gamma(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1.$$

**Conclusion :**  $\Gamma(1)$  converge et vaut 1.

Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  :

Par définition,  $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = I(p+1, 1)$ , ce qui assure sa convergence d'après la question 2.

On effectue l'intégration par parties :  $\begin{cases} u(t) = t^p; & u'(t) = p t^{p-1} \\ v'(t) = e^{-t}; & v(t) = -e^{-t} \end{cases}, u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^p e^{-x} = 0$  donc

$$\Gamma(p+1) \text{ est de même nature que } \int_0^\infty u'(t)v(t) = \int_0^\infty -pt^{p-1}e^{-t}dt$$

qui est bien convergente puisque, par linéarité de l'intégrale, elle vaut  $-p\Gamma(p)$ .

Dès lors :

$$\Gamma(p+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) - u(0)v(0) + p\Gamma(p) = 0 + p\Gamma(p)$$

**Conclusion :**  $\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$

On montre alors aisément par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $\Gamma(n) = (n-1)! : \mathcal{P}_n$

- $\mathcal{P}_1$  est vraie car  $\Gamma(1)$  converge et vaut  $1 = 0!$  d'après la question 4.
- Supposons que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie pour  $n$  fixé,  $n \geq 1$ .
- Alors  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$  d'après la relation qui précède.  
Soit  $\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$  d'après l'hypothèse de récurrence.

- **Conclusion :**  $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

 **Remarque :** La question « Montrer que pour tout entier naturel  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$  converge et vaut  $(p-1)!$  revient dans de nombreux sujets, sans avoir au préalable traité les questions 1., 2. et 3...  
Voilà comment rédiger dans ce cas :

Montrons par récurrence que :  $\Gamma(p) = (p-1)!$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$  converge et vaut  $1 = 0!$ .
- On suppose que  $\Gamma(p)$  converge et vaut  $(p-1)!$  pour  $p$  fixé ( $p \in \mathbb{N}^*$ ).
- Montrons que  $\Gamma(p+1)$  converge et vaut  $p!$  en menant une intégration par parties :  

$$\begin{cases} u(t) = t^p; & u'(t) = pt^{p-1} \\ v'(t) = e^{-t}; & v(t) = -e^{-t} \end{cases}, u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^p e^{-x} = 0$  donc

$$\Gamma(p+1) \text{ est de même nature que } \int_0^\infty u'(t)v(t) = \int_0^\infty -pt^{p-1}e^{-t}dt$$

qui est bien convergente puisque, par linéarité de l'intégrale, elle vaut  $-p\Gamma(p)$  avec  $\Gamma(p)$  qui converge par hypothèse.

Dès lors :

$$\Gamma(p+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) - u(0)v(0) + p\Gamma(p) = 0 + p\Gamma(p) = p(p-1)! = p!$$

- On termine la récurrence en écrivant :

**Conclusion :**  $\boxed{\Gamma(p) = (p-1)! \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*}$

⑤ Soit  $g$  définie par  $g(u) = 0$  si  $u \leq 0$  et  $g(u) = \frac{1}{\Gamma(p)} \lambda^p u^{p-1} e^{-\lambda u}$  sinon.

Montrons que  $g$  est une densité de probabilité :

- $g$  est positive sur  $\mathbb{R}$  puisque nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$  elle est formée d'un produit de fonction positives.
- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si  $p \geq 1$  et continue sur  $\mathbb{R}^*$  si  $0 < p < 1$  (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{p-1} = +\infty$  si  $0 < p < 1$ ).
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \lambda^p u^{p-1} e^{-\lambda u} du$  d'après la relation de Chasles. Soit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{1}{\Gamma(p)} I(p, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(p)} \Gamma(p) = 1$$

**Conclusion :**  $g$  est une densité de probabilités.

⑥ Montrons que  $\int_{-\infty}^{\infty} u g(u) du$  converge et calculons sa valeur :

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u g(u) du = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \lambda^p u^p e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda \Gamma(p)} I(p+1, \lambda) = \frac{1}{\lambda \Gamma(p)} \Gamma(p+1) = \frac{p \Gamma(p)}{\lambda \Gamma(p)} = \frac{p}{\lambda}.$$

**Conclusion :** Si  $Y$  de densité  $g$ ,  $\mathbb{E}(Y)$  existe et vaut  $\frac{p}{\lambda}$ .

Montrons que  $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 g(u) du$  converge et calculons sa valeur :

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 g(u) du = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \lambda^p u^{p+1} e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} I(p+2, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} \Gamma(p+2) = \frac{(p+1)p \Gamma(p)}{\lambda^2 \Gamma(p)} = \frac{(p+1)p}{\lambda^2}.$$

**Conclusion :** Si  $Y$  de densité  $g$ ,  $\mathbb{E}(Y^2)$  existe et vaut  $\frac{p(p+1)}{\lambda^2}$ .

ou encore  $\mathbb{V}(Y)$  existe et d'après Koëning Huygens :  $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}$