# Devoir surveillé 5 : Algèbre linéaire

# Problème 1 :

## 1 Résultats préliminaires

1. a) On calcule les inverses par l'une des méthodes vues en cours. Par exemple, pour l'inversibilité de $D_3$ on pourra écrire : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$D_3X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} y & = a \\ z & = b \\ x & = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = c \\ y & = a \\ z & = b \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

***Conclusion*** : $\boxed{D_3 \text{ est inversible et } D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

De même, $D_4$ est inversible et $D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Plusieurs réponses sont possibles :

i. On raisonne comme dans la question précédente et on passe par la résolution de $(S)$ $D_pX = Y$, soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = a_1 \\ x_3 & = a_2 \\ \vdots & \\ x_p & = a_{p-1} \\ x_1 & = a_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = a_p \\ x_2 & = a_1 \\ \vdots & \\ x_{p-1} & = a_{p-2} \\ x_p & = a_{p-1} \end{cases}$$

par simple permutation circulaire des lignes, à savoir : $L_1 \leftarrow L_p \leftarrow L_{p-1} \leftarrow \cdots \leftarrow L_2 \leftarrow L_1 \cdots$

Soit $\boxed{D_p \text{ inversible et } D_p^{-1} = {}^tP}$

ii. On utilise l'indication de l'énoncé et d'après la question précédente, on conjecture que $D_p$ est inversible et que son inverse est sa transposée, que l'on notera $D_p^T$. On prouve la conjecture en calculant le produit $D_pD_p^T$ : soit $A = D_pD_p^T$, et $a_{i,j}$ le coefficient de $A$ sur la ligne $i$ et la colonne $j$.

— *Rédaction 1 :* On utilise la définition du produit, à savoir, si on note $d_{i,j}$ les coefficients de $D_p$ et $d_{i,j}^T$ les coefficients $D_p^T$ :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} d_{k,j}^T = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} d_{j,k}$$

or, si $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a : $d_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dès lors $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 = j+1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $a_{p,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} d_{p,k} d_{j,k} = 1$ si $j = p$ car $d_{p,k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$...

— *Rédaction 2 : « à la main »* Ce coefficient $a_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit (matriciel) de la ligne $i$ de $D_p$ par la colonne $j$ de $D_p^T$, dont les coefficients sont ceux de la ligne $j$ de $D_p$. Or chaque ligne de $D_p$ ne comporte qu'un seul 1, qui se trouve en position $i+1$ pour la ligne $i$ (position 1 pour la ligne $p$) ; le 1 de la ligne $i$ est donc dans la même position que celui de la ligne $j$ si et seulement $i = j$, donc $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Tout ça prouve que } A = I_n\text{, ce qui montre que } D_p \text{ est inversible d'inverse } D_p^T.}$

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, puisque $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^k$. On en déduit :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k = \frac{1}{p}\frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{2i\pi}{p}}} = 0.$$

Géométriquement, $\frac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z_k$ est l'affixe du barycentre des points $A_0, \ldots, A_{p-1}$, et on a trouvé que ce barycentre est le centre $O$ du cercle sur lequel sont placés ces points.

3. Soit $z$ un complexe non nul ; on peut l'écrire $z = re^{i\theta}$ où $r$ est un réel strictement positif et $\theta$ un réel quelconque. On a alors :

$$z^p = 1 \iff r^p e^{pi\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^p = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, p\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi/p \end{cases}$$

# 2 Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

5. Il s'agit de relier la loi de $U_{n+1}$ à celle de $U_n$. On va utiliser le système complet d'événements $\{(U_n = k)\}_{k \in [\![0, p-1]\!]}$ et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}_{(U_n = j)}(U_{n+1} = i) \times \mathbb{P}(U_n = j)$$

Commençons en distinguant les cas $i = 0$ et $i = p-1$ :

— Pour $i = 0$ :
$\mathbb{P}_{(U_n = p-1)}(U_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n = 1)}(U_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(U_n = j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall 2 \leq j \leq p-2$.
Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(U_n = 1) + \mathbb{P}(U_n = p-1)\right)$$

— Pour $i = p-1$ :
$\mathbb{P}_{(U_n=p-2)}(U_{n+1} = p-1) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n=0)}(U_{n+1} = p-1)$ et $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall j \in [\![1, p-1]\!] \setminus \{p-2\}$. Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = p-1) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(U_n = 0) + \mathbb{P}(U_n = p-2))$$

— Pour $1 \leq i \leq p-2$ :
Lorsque la particule se trouve en $A_j$, elle ne peut se déplacer que vers $A_{j+1}$ ou $A_{j-1}$ et ceci avec probabilité $1/2$. On a donc :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i-1) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i+1)$$

Ceci montre qu'on a bien une formule du type $X_{n+1} = MX_n$, où $M$ est la matrice carrée dont les coefficients sont les $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = i)$. Autrement dit la matrice qui a des $1/2$ sur la surdiagonale, la sousdiagonale, et les coins en haut à droite et en bas à gauche, et des 0 partout ailleurs. Ou encore :

$$M_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(D_p + D_p^T).$$

6. On a $X_n = M_p^n X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. La formule demandée découle de celle obtenue à la question 5) et de la propriété $D_p^{-1} = D_p^T$ de la question 1)b).

8. a) On cherche donc les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $rg(M_3 - \lambda I_3) < 3$ ; on calcule ce rang par pivot, et on trouve après calculs (je ne les ai pas rédigés mais ils doivent figurer sur la copie) :

$$rg(M_3 - \lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & (1+2\lambda)(2-2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = -1/2 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   b) On détermine ensuite les noyaux demandés, à partir de la dernière matrice du calcul ci-dessus :

$$E_{-1/2} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

   ***Conclusion*** : $\boxed{E_{-1/2} = \text{Vect}\{u_1, u_2\} \text{ où } u_1 = (-1,1,0) \text{ et } u_2 = (-1,0,1)}$

$$E_1 = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect((1,1,1)).$$

   ***Conclusion*** : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{u_3\} \text{ où } u_3 = (1,1,1)}$

   Par ailleurs, on vérifie comme nous le demande l'énoncé, que :

$$X \in E_\lambda(M_3) \Leftrightarrow (M_3 - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (f_3 - \lambda id_3)(u) = 0 \Leftrightarrow f_3(u) - \lambda u = 0 \Leftrightarrow f_3(u) = \lambda u$$

***Conclusion*** : $\boxed{f_3(u_1) = -\frac{1}{2}u_1,\ f_3(u_2) = -\frac{1}{2}u_2 \text{ et } f_3(u_3) = u_3}$

c) Montrons que $M_3$ et $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables : Cela découle immédiatement de la question précédente, à condition de montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si c'est le cas, alors par construction, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f_3) = D$.

Montrons donc que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ : C'est une famille de cardinal égale à 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On fait le choix ici de calculer le rang de cette famille de vecteurs en passant par le rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur qui n'est autre que la matrice de passage qui est demandée en fin de question.

$$\mathrm{rg}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

On peut donc conclure que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

***Conclusion*** : $\boxed{M_3 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

d) Après calcul, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [✎ *A faire. C'est très rapide*]

e) D'après la question 6), $X_n$ est la première colonne de $M_3^n$. On a, par une récurrence à écrire dans la copie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} M_3^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1/2)^n & -(-1/2)^n & 1 \\ (-1/2)^n & 0 & 1 \\ 0 & (-1/2)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La limite de $P(U_n = k)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ est donc $1/3$, quel que soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Les trois positions tendent à devenir équiprobables lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

9. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur et $\lambda$ un complexe. On a :

$$\begin{aligned} D_pX = \lambda X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_p = \lambda x_{p-1} \\ x_1 = \lambda x_p \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_p = \lambda^{p-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^p x_1 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad X = 0 \text{ ou } \left( \lambda^p = 1 \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix} x_1 \right) \end{aligned}$$

**Conclusion :** Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles il existe $X \neq 0$ avec $D_pX = \lambda X$ sont donc les complexes $\lambda$ tels que $\lambda^p = 1$.

En prenant $x_1 = 1$, on obtient qu'il existe $p$ valeurs $\lambda$ complexes, à savoir les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, obtenus à la question I.4. pour lesquelles $D_pX_k = z_kX_k$ avec $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$.

10. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. *On cherche à montrer que $Q$ est inversible :*

✐ La question qu'il faut se poser c'est, quel est l'intérêt de montrer cette inversibilité. La réponse est immédiate si on note que la matrice $Q$ est la matrice des coordonnées des vecteurs $X_k$ obtenus à la question précédente (puisque $z_0 = 1$). Dès lors, montrer l'inversibilité de $Q$ c'est montrer que son rang vaut $p$ et donc que la famille $\{X_0 \cdots, X_{p-1}\}$ est libre...

Allons-y et, conformément à l'énoncé, on pose $R = {}^tQ$ et on considère le système homogène $(S) : RX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$.

— *Montrons que $1, z_1, \cdots z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_{p-1}X^{p-1}$ :*

Le système $(S)$ donne :

$$RX = 0 \Leftrightarrow {}^tQX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{p-1} \\ 1 & z_{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_1 a_1 + \cdots + z_1^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_2 a_1 + \cdots + z_2^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + z_{p-1} a_1 + \cdots + z_{p-1}^{p-1} a_{p-1} & = 0 \end{cases}$$

ou encre : 1, $z_1, \cdots, z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-1}$.

— *Concluons que la seule solution de* $(S)$ *est la solution nulle :* Il suffit de dire que le polynôme $P$ est un polynôme de degrés inférieur ou égale à $p-1$. Or il possède $p$ racines distinctes (cf. 1.4.).
***Conclusion*** : $\boxed{P \text{ est le polynôme nul ou encore } a_0 = 0 = a_1 = \cdots a_{p-1}}$

— On en déduit que le système homogène $(S)$ : $RX = 0$ admet une unique solution qui est la solution nulle. C'est un système de Cramer. La matrice $R = {}^tQ$ associée au système est donc inversible.
Et si on rappelle que $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ)$, alors $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ) = p = ordre(Q)$.
***Conclusion*** : $\boxed{Q \text{ est inversible}}$

11. Posons $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v_k)$ ou $\mathcal{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^p$. *Montrons que la famille* $(v_0, v_1, \cdots, v_{p-1})$ *est une base de* $\mathbb{C}^p$ *:* Cela découle immédiatement de la question précédente.
Le rang de la famille $(v_0, \cdots, v_{p-1})$ est égale au rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur, autrement dit la matrice $Q$.
Dès lors, $\text{rg}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = \text{rg}(Q) = p$. Ce qui prouve que cette famille est libre.
Par ailleurs $\text{Card}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = p = \dim(\mathbb{C}^p)$.
***Conclusion*** : $\boxed{\mathcal{B}'' = (v_0, \cdots, v_{p-1}) \text{ est une base de } \mathbb{C}^p.}$

12. Soit $D_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g_p)$ où $g_p$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{B}_2$ est sa base canonique.
On sait grâce à la question 9. que $D_p X_k = z_k X_k$, soit $g_p(v_k) = z_k v_k$.
L'expression de la matrice de $g_p$ dans la base $\mathcal{B}''$ donne immédiatement :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(g_p) = \Delta = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$$

Et d'après les formules de changement de base, puisque par construction $Q = Pass(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'')$, on a : $\boxed{D_p = Q \Delta_p Q^{-1}}$

13. *Justifions l'inversibilité de $D_p$ et exprimons $D_p^{-1}$ en fonction de $Q$ et $\Delta_p$ :*
La matrice $\Delta_p$ est inversible car elle est diagonale et n'a pas de 0 sur sa diagonale.
On en déduit, à l'aide de la formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour des matrices $A$ et $B$ inversibles, que $D_p^{-1} = (Q^{-1})^{-1}\Delta_p^{-1}Q^{-1} = Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}$.

Par ailleurs, grâce à la question 7., $M_p = \dfrac{1}{2}(D_p + D_p^{-1}) = \dfrac{1}{2}\left(Q\Delta_pQ^{-1} + Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}\right)$, soit :

$$M_p = \frac{1}{2}Q(\Delta_p + \Delta_p^{-1})Q^{-1} = \frac{1}{2}Q\begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On peut alors conclure que dans la base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{C}^p$, la matrice de l'endomorphisme $f_p$ dont $M_p$ est la matrice, est diagonale.

14. *Montrons que $M_p$ est semblable à $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\pi/p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$ :*
Il suffit pour ça de dire que :

$$\tfrac{1}{2}\left(z_k + \tfrac{1}{z_k}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{2ik\pi}{p}} + e^{-\frac{2ik\pi}{p}}\right) = \cos\left(\tfrac{2k\pi}{p}\right)$$

✐ Remarque que les valeurs sur la diagonales sont donc toutes réelles...

15. On suppose dans cette question que $p$ est impair.

a) Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. *Déterminons* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$ :
Cette limite vaut 0 car avec les hypothèses sur $k$, $p$ étant impair, l'angle $\frac{2k\pi}{p}$ est dans l'intervalle $]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, et donc son cosinus est strictement compris entre $-1$ et 1.

b) En déduire $\underset{n\to\infty}{lim} T_p^n$. On commence par rappeler qu'on obtient la puissance $n$-ième d'une matrice diagonale en élevant les termes de sa diagonale à la puissance $n$. Dès lors :

$$\underset{n\to\infty}{lim} T_p^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

c) Comme $\underset{n\to\infty}{lim} X_n = \underset{n\to\infty}{lim} M_p^n X_0 = \underset{n\to\infty}{lim} QT_p^nQ^{-1}X_0 = Q \cdot \underset{n\to\infty}{lim} T_p^n \cdot Q^{-1}X_0$
on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} X_n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La première colonne de la matrice obtenue par le produit de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ par } Q^{-1}$$

a tous ses coefficients égaux au coefficient en haut à gauche de $Q^{-1}$. On ne connaît pas ce coefficient, mais on sait que la somme des coefficients de $X_n$ vaut 1 (et la multiplication par $X_0$ retournera justement cette première colonne...), donc la somme de leurs limites (qui est la limite de la somme) vaut 1 aussi. Donc ce coefficient vaut forcément $1/p$.

d) *Interprétons le résultat obtenu :* Comme dans le cas particulier $p = 3$, les différentes positions possibles pour la particules tendent vers l'équiprobabilité lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

## Problème 2 : Epreuve Agro-véto A 2011

① Il suffit pour répondre à cette question de vérifier l'égalité. Or :

$$AY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = Y'$$

puisque $y$ est solution de $(\varepsilon_3')$ .

***Conclusion*** : $\boxed{Y' = AY}$

② Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $I$ la matrice identité de taille 3. On pose conformément à l'énoncé :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en permutant les colonnes } C_1 \leftarrow C_3 \leftarrow C_2 \leftarrow C_1$$

Donc $\text{rg}(A) = ordre(A)$ ce qui permet d'assurer que $A$ inversible.
***Conclusion*** : $\boxed{\text{rg}(f) = 3,\ f \text{ est bijective, } \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \text{ et } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

b)

$$\begin{aligned} \text{rg}(f - id_E) = \text{rg}(A - I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

D'où $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg}(f - id_E) = \dim(\text{Im}(f - id_E)) = 2$ et donc

$$\dim(\ker(f - id_E)) = 3 - \text{rg}(f - id_E) = 3 - 2 = 1 \text{ d'après la formule du rang.}$$

On note par ailleurs, conformément aux indications de l'énoncé, que :

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (f - id_E)(u) = 0$$

Donc $u = (1,1,1) \in \ker(f - id_3)$ qui est une droite vectorielle.
***Conclusion*** : $\boxed{\ker(f - id_3) = \text{Vect}\{u\} \text{ où } u = (1,1,1)}$

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que l'ensemble des solutions de $(S_\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $E_\lambda$. Pour cela, définissons plus clairement $E_\lambda$ en posant :

$$E_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) \text{ solution de } (S_\lambda)\} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / M_\lambda \cdot X = 0\}.$$

Dès lors :
— $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ par définition de $E_\lambda$.
— $0_{\mathbb{R}^3}$ est solution évidente de $(S_\lambda)$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_\lambda$.
— $\forall X_1, X_2 \in E_\lambda$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$ :
Il suffit de dire que :

$$M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = \alpha M_\lambda \cdot X_1 + M_\lambda \cdot X_2$$

Or $M_\lambda \cdot X_1 = 0$ et $M_\lambda \cdot X_2 = 0$ car $X_1$ et $X_2$ sont solutions de $(S_\lambda)$

donc $M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = 0$ ou encore $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$

***Conclusion*** : $\boxed{E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

d) Le système homogène $(S_\lambda)$ n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice assocée $M_\lambda$ n'est pas inversible, ou encore, puisque c'est une matrice d'ordre 3 si et seulement si $\boxed{\mathrm{rg}(M_\lambda) < 3}$.
Déterminons en fonction de $\lambda$ le rang de $M_\lambda$ (nous prendrons, une fois n'est pas coutume, le pivot en haut à droite...) :

$$\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \boxed{-2} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\lambda} & 0 \\ -\lambda(2-\lambda) & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

♦ *Premier cas* : Si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Donc si $\lambda = 0$ le système $S_\lambda$ est un système de Cramer.

♦ *Second cas* : Si $\lambda \neq 0$, $\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\lambda} & 0 \\ P(\lambda) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow \lambda L_3 + (2-\lambda) L_2) \end{matrix}$

avec $P(\lambda) = -\lambda^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda^2+1) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

***Conclusion*** : $\boxed{S_\lambda \text{ n'est pas de Cramer pour : } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = 2}$

e) <u>En $\lambda_1 = -1$</u>, le système précédent équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +y & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à $-1$ est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.
***Conclusion*** : $\boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\} = \mathrm{Vect}\{u_1\}.}$

En $\lambda_2 = 1$ le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x = y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $(1,1,1)$.

***Conclusion*** : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{(1,1,1)\} = \text{Vect}\{u_2\}.}$

En $\lambda = 2$ le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} & y & -2z & = & 0 \\ x & -2y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ x = 2y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(4,2,1)$.

***Conclusion*** : $\boxed{E_2 = \text{Vect}\{(4,2,1)\} = \text{Vect}\{u_3\}.}$

f) *Montrons que $\mathcal{B}_1 = (u_2, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ :*
Commençons par noter que $\text{Card}(u_2, u_1, u_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc nous nous contenterons de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0$ $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 & (L_1) \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_3 & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 3\lambda_3 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_1 - L_3) \end{cases}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3 \,;\text{ famille libre}}$

La famille $(u_2, u_1, u_3)$ étant formée de trois vecteurs, on en déduit qu' $\boxed{\text{il s'agit d'une base de } \mathbb{R}^3}$.

***Conclusion*** : $\boxed{\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

g) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de la famille de vecteurs $(u_2, u_1, u_3)$.
D'après la question précédente il est immédiat que $\text{rg}(P) = \text{rg}\{u_2, u_1, u_3\} = 3 = ordre(P)$.

***Conclusion*** : $\boxed{P \text{ est inversible}}$

Inversons $P$ : Quels que soient les réels $x, y, z, a, b, c$ on a :

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & a \\ x & -y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +4z & = & a \\ 2x & & +6z & = & a+b \\ & & 3z & = & a-c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrrr} y & = & \frac{1}{6}a & -\frac{1}{2}b & +\frac{1}{3}c \\ x & = & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{2}b & +c \\ z & = & \frac{1}{3}a & & -\frac{1}{3}c \end{array}\right.$$

On en déduit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ où $P^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}}$$

h) Par le calcul, il est immédiat que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

③ Soit $y$ une solution de $(\varepsilon_3')$ sur $\mathbb{R}$.

a) On a

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par $P^{-1}$ à gauche. Soit :

$$\boxed{P^{-1}Y' = DP^{-1}Y}$$

b) On pose $Z = P^{-1}Y$.
Connaissant $P^{-1}$, il suffit de faire le produit matriciel pour en déduire l'expression de $z_1$, $z_2$ et $z_3$ en fonction de $y$, $y'$ et $y''$.
A savoir :

$$z_1 = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$$
$$z_2 = \frac{1}{6}y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{3}y$$
$$z_3 = \frac{1}{3}y'' - \frac{1}{3}y$$

$y$ étant une solution de $(\varepsilon_3')$ , on en déduit qu'elle est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, $y'$ est de classe $C^2$ et $y''$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, autrement dit $y, y'$ et $y''$ sont trois fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Il vient alors que $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) En dérivant les relations précédentes, on obtient :

$$z_1' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y'$$
$$z_2' = \frac{1}{6}y^{(3)} - \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{3}y'$$
$$z_3' = \frac{1}{3}y^{(3)} - \frac{1}{3}y'$$

Ou encore, puisque par hypothèse, $Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $\boxed{Z' = P^{-1}Y'}$.

La question 3.a) permet de conclure : $\boxed{Z' = P^{-1}Y' = DP^{-1}Y = DZ}$.

d) $Z' = DZ \Leftrightarrow Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ -z_2(x) \\ 2z_3(x) \end{pmatrix}$.

Reprenant en particulier l'expression de $z_1$, on en déduit : $\boxed{z_1' = z_1}$ La résolution des équations différentielles du premier ordre permet d'en déduire qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $z_1(x) = \lambda e^x$, pour tout réel $x$.

④ Détermination de l'ensemble $S_3'$ des solutions de $(\varepsilon_3')$ sur $\mathbb{R}$ :

a) D'après la question 3.b) on vient de prouver que $y$ vérifie l'équation différentielle

$$z_1(x) = \lambda e^x = -\tfrac{1}{2}y'' + \tfrac{1}{2}y' + y \text{ ou encore } (**) - y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(**)$ est $-r^2+r+2 = 0$, qui admet pour racines $-1$ et $2$ (après éventuel calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(**)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Quant à déterminer une solution particulière, on peut toujours dire que $y_p : x \longmapsto \lambda e^x$ est solution évidente... sinon on posera $y_p(x) = Q(x)e^x$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Dès lors :

$$y_p'(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x \text{ et } y_p''(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x$$

Soit

$$-y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) = (-Q''(x) - 2Q'(x) - Q(x) + Q'(x) + Q(x) + 2Q(x))\, e^x = (-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x))\, e^x = 2\lambda e^x$$

et puisque $e^x \neq 0$ pour tout $x$ réel, on a :

$$-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x) = 2\lambda \text{ et donc } \boxed{Q(x) = \lambda}$$

Au final, on voit que $y$ est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Si } y \in S_3',\ \exists (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x.}$

ou encore

***Conclusion*** : $\boxed{S_3' \subset Vect\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}}$

b) Pour établir la réciproque, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de $(\varepsilon_3')$, ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= \left(-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -2\left(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -\left(-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad +2\left(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{S_3' = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)}$$

⑤ On déduit du résultat ci-dessus que $S_3'$ est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$, à savoir par une famille finie de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour démontrer que celui-ci est de dimension 3, il suffit de mettre en évidence une base et, la famille ci-dessus étant génératrice, il suffit de prouver qu'elle est libre et pour cela revenons à la définition :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(***)$.
Cette égalité est en particulier vrai par passage à la limite en $-\infty$. D'où

$$\lambda_1 = 0$$

Donc $(***) \Rightarrow \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$(***) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad (x=0) \\ \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e &= 0 \quad (x=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 e + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

***Conclusion*** : $\boxed{(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x) \text{ est une base de } S_3'}$.

ou encore :

***Conclusion*** : $\boxed{S_3' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 3.}}$

✐ **Remarque (Pour une lecture en fin d'année) :** Pour montrer que la famille $\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}$ est libre, on peut aussi utiliser le cours « Réduction d'endomorphismes » en remarquant que $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$ sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes (en l'occurrence $-1, 2$ et $1$) de l'application linéaire $\Psi : f \mapsto f'$. Ce qui termine la démonstration...

⑥ Si $y(0) = 1$, $y'(0) = 0 = y''(0)$, *déterminons la solution analytique de* $(\varepsilon_3')$ *:*

D'après la question précédente, on sait que si $y$ est solution de $(\varepsilon_3')$, alors

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / y(x) = ae^{-x} + be^x + ce^{2x}$$

d'où l'on tire : $y'(x) = -ae^{-x} + be^x + 2ce^{2x}$ et $y''(x) = a^x + be^x + 4ce^{2x}$.

A l'aide des conditions initiales fournies, on obtient le système ci-dessous qu'il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} y(0) = a+b+c & = 1 \\ y'(0) = -a+b+2c & = 0 \\ y''(0) = a+b+4c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c & = 1 & L_1 \\ 2b+3c & = 1 & L_2+L_1 \\ 3c & = -1 & L_3-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = -1/3 \\ b & = 1 \\ a & = 1/3 \end{cases}$$

**Conclusion :** Il existe une unique solution de $(\varepsilon_3')$ vérifiant $y(0)=1$, $y'(0)=0=y''(0)$, à savoir :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + e^x - \frac{1}{3}e^{2x}}$$

⑦ *Une approximation numérique de la solution par la méthode d'Euler :*

Nous utilisons pour ça les notations suivantes : $y'(t) = v(t)$ et $y''(t) = a(t)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'écrire, puisque $y$ vérifie $(\varepsilon_3')$ :

$$\begin{cases} a'(t) = y'''(t) & = 2a(t) + v(t) - 2y(t) \\ v'(t) & = a(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}$$

On rappelle alors que pour $h$ suffisamment petit :

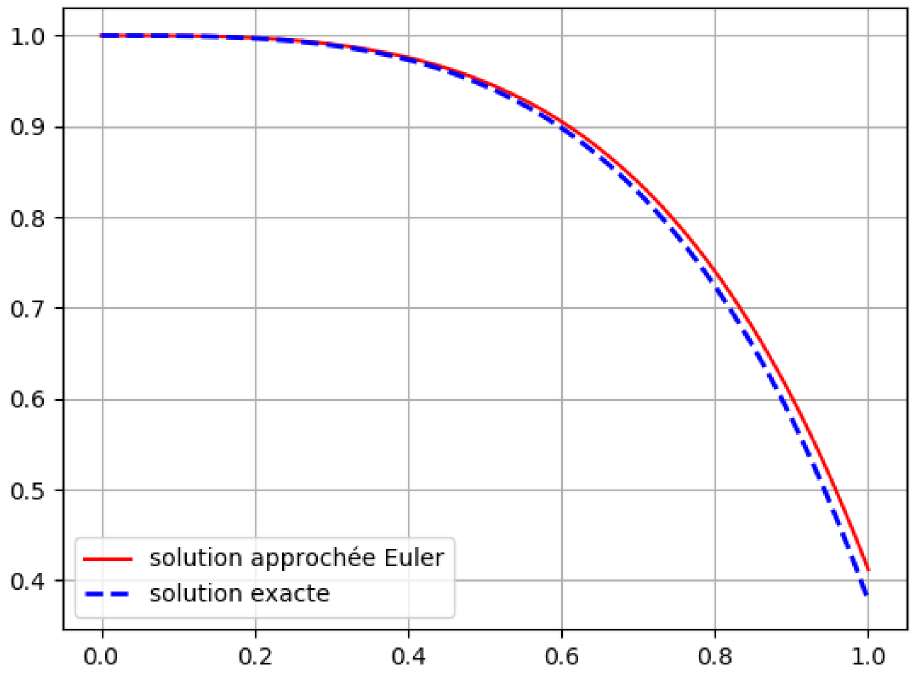
$$\begin{cases} a(t+h) & \approx a(t) + h \cdot a'(t) = a(t) + h(2a(t) + v(t) - 2y(t)) = (1+2h)a(t) + hv(t) - 2hy(t) \\ v(t+h) & \approx v(t) + h \cdot v'(t) = v(t) + ha(t) \\ y(t+h) & \approx y(t) + h \cdot y'(t) = y(t) + hv(t) \end{cases}$$

Prenons pour exemple $y(0)=1$, $y'(0)=0=y''(0)$. On construit ensuite une valeur approchée de la solution en prenant $y_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $a_0 = 0$ puis en construisant pas à pas les valeurs successives de $y$, $v$ et $a$ qu'on notera $y_n$, $v_n$ et $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en posant :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = (1+2h)a_n + hv_n - 2hy_n \\ v_{n+1} & = v_n + ha_n \\ y_{n+1} & = y_n + hv_n \end{cases}$$

Soit :

```
def simulSolutionEe(y0,v0,a0,h,t0,tf):
    nbe_pas = int((tf-t0)/h)
    y = [0]*(nbe_pas+1)
    v = [0]*(nbe_pas+1)
    a = [0]*(nbe_pas+1)
    y[0],v[0],a[0] = y0,v0,a0
    for pas in range(nbe_pas):
       a[pas+1] = (1+2*h)*a[pas]+h*v[pas]-2*h*y[pas]
       v[pas+1] = v[pas]+h*a[pas]
       y[pas+1] = y[pas]+h*v[pas]
    return y,v,a
```


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
solution approchée Euler
solution exacte