# Devoir surveillé 5 : Algèbre linéaire

## Exercice :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : $u_1 = (0, 3, -2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (3, -3, 1)$
Soient de plus :

$$E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} \text{ et } D = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists a \in \mathbb{R}, u = (a, a, a)\}$$

① *Montrons que $E$ et $D$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :*

a) $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car engendré par une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour $D$ on peut utiliser le même argument en écrivant que :

$$D = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

Sinon, on passe par la caractérisation :
— $D \subset \mathbb{R}^3$
— $(0, 0, 0) \in D$ (il suffit de prendre $a = 0$).
— Soit $u, v \in D$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\exists a \in \mathbb{R} / u = (a, a, a) \text{ et } \exists b \in \mathbb{R} / v = (b, b, b)$$

et $\lambda u + v = (\lambda a + b, \lambda a + b, \lambda a + b) \in D$. ***Conclusion*** : $\boxed{D \text{ sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

② *La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?* On passe par exemple par la définition :

$$\text{Soit } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \ (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 & = -3\lambda_3 \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \end{cases} , \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

On en déduit que : $(*) \Leftrightarrow 2\lambda_3 u_1 - 3\lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Ou encore :

$$2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{La famille } \{u_1, u_2, u_3\} \text{ est liée}}$

③ *Déterminons une base et une équation cartésienne de $E$ :* Puisque $u_1$ et $u_2$ sont non colinéaires, on peut en déduire que $\{u_1, u_2\}$ est libre, ou encore :

$$\text{rg}\{u_1, u_2, u_3\} = 2 = \dim(\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}) = dim(E)$$

$E$ est donc un plan vectoriel dont $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base. Il est demandé d'en donner l'équation cartésienne : Une méthode possible consiste à dire que :

$$v = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow \text{rg}(u_1, u_2, v) = 2$$

Or,

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(u_1,u_2,v) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 3 & 1 & y\\ -2 & -1 & z\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & 1 & y\\ 0 & 1 & x\\ -2 & -1 & z\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_2\\ L_2 \leftarrow L_1\\ L_3\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & 1 & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & -1 & 3z+2y\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3 \leftarrow 3L_3+2L_1\end{matrix} \quad = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & 1 & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & x+2y+3z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dès lors, $v=(x,y,z)\in E \Leftrightarrow x+2y+3z=0$.

***Conclusion*** : $\boxed{E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+2y+3z=0\}}$

④ *Déterminons l'intersection de $E$ et de $D$ :*

$$(x,y,z)\in E\cap D \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+3z & =0\\ x=y & =z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6z & =0\\ x=y & =z\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

***Conclusion*** : $\boxed{E\cap D=\{0\}}$

✐*Remarque :* On pouvait aussi noter que $(1,1,1)\notin E$ et donc l'intersection du plan vectoriel $E$ et de la droite $D$ est réduite au seul vecteur nul...

## Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes la puissance $n$-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $M=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

① Première méthode :

a) *Exprimons $J^n$ en fonction de $J$ pour tout entier naturel $n$* :
Un calcul rapide montre que $J^2=3J$.
On va montrer par récurrence que $J^n=3^{n-1}J$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

— $J^1=J=3^0J$ suffit à initialiser cette récurrence pour $n=1$.
— On suppose que $J^n=3^{n-1}J$ pour un entier $n\geq 1$.
— Alors $J^{n+1}=J^nJ=3^{n-1}J^2=3^{n-1}3J=3^nJ$. Ce qui prouve l'hérédité de la relation.

***Conclusion*** : $\boxed{J^n=3^{n-1}J,\ \forall n\geq 1 \text{ et } J^0=I}$

b) *Déterminons deux réels $a$ et $b$ tels que $M=aI+bJ$* :

$$M=aI+bJ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b & b & b\\ b & b & b\\ b & b & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & b & b\\ b & a+b & b\\ b & b & a+b\end{pmatrix}$$

Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b &= 1/2 \\ b &= 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}$.

***Conclusion*** : $\boxed{M = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J}$ ; *Rque* : on pouvait aussi noter directement que $4M = I + J$

c) *Calculons $M^n$ pour tout entier naturel $n$ :*
Si $n = 0$, $M^n = M^0 = I$.
Sinon, la relation précédente nous invite à utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui est possible car $I$ et $J$ commutent.
Alors, $\forall n > 0$ :

$$M^n = \left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J\right)^n = \frac{1}{4^n}(I+J)^n = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$$

On utilise alors le résultat de la question 1. en prenant soin de distinguer le cas $k = 0$.
Dès lors :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{4^n}\left[\binom{n}{0}J^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k\right)J\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k - 1\right)J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left(I + \frac{4^n-1}{3}J\right) = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)J \end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{M^n = I \text{ si } n = 0 \text{ et } M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} \end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*}$

② Deuxième méthode :

a) Après calculs... on obtient : $\boxed{M^2 - \frac{5}{4}M + \frac{1}{4}I = 0}$

b) *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que : $M^n = a_nM + b_nI$ :*

— *Initialisation* : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $M^0 = I = 0M + 1I$. On a dans ce cas $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
— On suppose la propriété vraie au rang $n$. C'est-à-dire $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = a_nM + b_nI$.
— *Hérédité* :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (a_nM + b_nI) \times M = a_nM^2 + b_nM \\ &= a_n\left(\frac{5}{4}M - \frac{1}{4}I\right) + b_nM = \left(\frac{5}{4}a_n + b_n\right)M - \frac{1}{4}a_nI \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = \dfrac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$ on prouve l'existence de deux réels $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

— ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La propriété est vraie pour tout entier naturel } n}$

c) D'après ce qui précède, on a $a_{n+1} = \dfrac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
On sait déjà que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Comme $M^1 = 1.M + 0.I$ on en déduit que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

d) *Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2 : La question précédente permet d'assurer que : $a_{n+2} = \dfrac{5}{4}a_{n+1} + b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'où, sachant que pour tout entier naturel $n$ : $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$, on a :

$$a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

***Conclusion*** : $\boxed{(a_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre } 2}$.

Son équation caractéristique et : $r^2 - \dfrac{5}{4}r + \dfrac{1}{4}$ dont les racines sont les mêmes que celles de l'équation $4r^2 - 5r + 1 = 0$, c'est-à-dire $r = 1$ et $r = \dfrac{1}{4}$.
D'où $a_n = \lambda 1^n + \mu \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Les conditions à l'origine permettent d'obtenir le système $\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \dfrac{1}{4}\mu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = \dfrac{4}{3} \\ \mu & = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Dès lors :

$$a_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } b_n = -\frac{1}{4}a_{n-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I \\
&= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I \\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-1 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times I\right)
\end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{2}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} \\ 1-\dfrac{1}{4^n} & 1+\dfrac{2}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} \\ 1-\dfrac{1}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} & 1+\dfrac{2}{4^n} \end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}}$

③ Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Soit $(S_\lambda)$ le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i. $(S_\lambda)$ n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée $A_\lambda$ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) < 3$.

$$\text{rg}A_\lambda = \text{rg}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 2-4\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_3) \\ (L_2) \\ (L_1) \end{matrix}$$
$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda) \\ 0 & -1+4\lambda & 1-(2-4\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2 - L_1) \\ (L_3 - (2-4\lambda)L_1) \end{matrix}$$

avec $1-(2-4\lambda)^2 = [1-(2-4\lambda)][1+(2-4\lambda)] = (4\lambda-1)(3-4\lambda)$.
D'où :

$$\text{rg}A_\lambda = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda) \\ 0 & -1+4\lambda & (4\lambda-1)(3-4\lambda) \end{pmatrix}$$
$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 + L_2) \end{matrix}$$

avec $P(\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3) - (1-4\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3-1) = 4(1-4\lambda)(\lambda-1)$.

En conséquence, $\text{rg}A_\lambda < 3 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ ou $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ où $\lambda - 1 = 0$.

***Conclusion*** : $\boxed{(S_\lambda) \text{ n'est pas de Cramer si } \lambda = \lambda_1 = 1 \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = \dfrac{1}{4}}$

ii. Soit $E_\lambda$ l'espace vectoriel solution de $(S_\lambda)$ dans chacun de ces deux cas.

Par définition, $E_{\lambda_1} = E_1 = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 / A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (S_1)\}$

D'après ce qui précède, en prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z & = 0 \\ -3y+3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = z \\ x & = z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

***Conclusion*** : $\boxed{E_1 = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\}}$

Par définition, $E_{\lambda_2} = E_{\frac{1}{4}} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / A_{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (S_{\frac{1}{4}})\}$

D'après ce qui précède, en prenant cette fois $\lambda = \frac{1}{4}$, on obtient :

$(S_{\frac{1}{4}}) \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -y - z, \ \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$

***Conclusion*** : $\boxed{E_{\frac{1}{4}} = \{(-y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$

b) *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrons que* $P$ *est inversible et calculer* $P^{-1}$ :

On commence par noter que la première colonne est élément de $E_1$ et que les deux dernières colonnes sont élément de $E_{\frac{1}{4}}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$P$ est inversible si et seulement si le système associé $PX = B$ est un système de Cramer. On aura alors $X = P^{-1}B$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z & = a \\ x + z & = b \\ x + y & = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = b - x & (L_2) \\ y = c - x & (L_3) \\ x - y - z = x - c + x - b + x = a & (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{1}{3}(a + b + c) \\ y & = c - \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(-a - b + 2c) \\ z & = b - \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(-a + 2b - c) \end{cases}$$

L'unicité de la solution prouve qu'il s'agit bien d'un système de Cramer.

***Conclusion*** : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

c) *Calculons* $D = P^{-1}MP$ *ainsi que* $D^n$ *pour tout entier naturel* $n$ :

Un calcul rapide donne :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***Conclusion*** : $\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D}$

On montre alors par une récurrence immédiate que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}}$$

d) *Exprimons $M$ en fonction de $D$, $P$ et $P^{-1}$ et démontrons que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel $n$ :*

$$D = P^{-1}MP \Leftrightarrow PD = MP \Leftrightarrow PDP^{-1} = M \text{ car } PP^{-1} = I_3$$

*Démontrons maintenant par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel $n$ :*

— La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $M^0 = I = PIP^{-1} = PD^0P^{-1}$ et elle est vraie pour $n = 1$ d'après ce qui précède.
— Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.
— Alors $M^{n+1} = M^n \cdot M = PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}}$

e) On obtient dès lors aisément :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

***Conclusion*** : $\boxed{M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}}$

## Problème 2 : Epreuve Agro-véto A 2011

① Il suffit pour répondre à cette question de vérifier l'égalité. Or :

$$AY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = Y'$$

puisque $y$ est solution de $(\varepsilon_3')$.

***Conclusion*** : $\boxed{Y' = AY}$

② Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $I$ la matrice identité de taille 3. On pose conformément à l'énoncé :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en permutant les colonnes } C_1 \leftarrow C_3 \leftarrow C_2 \leftarrow C_1$$

Donc $\text{rg}(A) = ordre(A)$ ce qui permet d'assurer que $A$ inversible.
***Conclusion*** : $\boxed{\text{rg}(f) = 3,\ f \text{ est bijective, } \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \text{ et } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

b)

$$\begin{aligned} \text{rg}(f - id_E) = \text{rg}(A - I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

D'où $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg}(f - id_E) = \dim(\text{Im}(f - id_E)) = 2$ et donc

$\dim(\ker(f - id_E)) = 3 - \text{rg}(f - id_E) = 3 - 2 = 1$ d'après la formule du rang.

On note par ailleurs, conformément aux indications de l'énoncé, que :

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (f - id_E)(u) = 0$$

Donc $u = (1, 1, 1) \in \ker(f - id_3)$ qui est une droite vectorielle.
***Conclusion*** : $\boxed{\ker(f - id_3) = \text{Vect}\{u\} \text{ où } u = (1, 1, 1)}$

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que l'ensemble des solutions de $(S_\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $E_\lambda$. Pour cela, définissons plus clairement $E_\lambda$ en posant :

$$E_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) \text{ solution de } (S_\lambda)\} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / M_\lambda \cdot X = 0\}.$$

Dès lors :
— $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ par définition de $E_\lambda$.
— $0_{\mathbb{R}^3}$ est solution évidente de $(S_\lambda)$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_\lambda$.
— $\forall X_1, X_2 \in E_\lambda$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$ :
Il suffit de dire que :

$$M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = \alpha M_\lambda \cdot X_1 + M_\lambda \cdot X_2$$

Or $M_\lambda \cdot X_1 = 0$ et $M_\lambda \cdot X_2 = 0$ car $X_1$ et $X_2$ sont solutions de $(S_\lambda)$

donc $M_\lambda \cdot (\alpha X_1 + X_2) = 0$ ou encore $\alpha X_1 + X_2 \in E_\lambda$

***Conclusion*** : $\boxed{E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

d) Le système homogène $(S_\lambda)$ n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice assocée $M_\lambda$ n'est pas inversible, ou encore, puisque c'est une matrice d'ordre 3 si et seulement si $\boxed{\mathrm{rg}(M_\lambda) < 3}$.
Déterminons en fonction de $\lambda$ le rang de $M_\lambda$ (nous prendrons, une fois n'est pas coutume, le pivot en haut à droite...) :

$$\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \boxed{-2} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\lambda} & 0 \\ -\lambda(2-\lambda) & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

♦ *Premier cas* : Si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$

Donc si $\lambda = 0$ le système $S_\lambda$ est un système de Cramer.

♦ *Second cas* : Si $\lambda \neq 0$, $\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & \boxed{-\lambda} & 0 \\ P(\lambda) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow \lambda L_3 + (2-\lambda)L_2) \end{matrix}$

avec $P(\lambda) = -\lambda^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda^2+1) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

***Conclusion*** : $\boxed{S_\lambda \text{ n'est pas de Cramer pour : } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = 2}$

e) <u>En $\lambda_1 = -1$</u>, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à $-1$ est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.
***Conclusion*** : $\boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\} = \mathrm{Vect}\{u_1\}.}$

<u>En $\lambda_2 = 1$</u> le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ x = y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$.

***Conclusion*** : $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\} = \mathrm{Vect}\{u_2\}.}$

<u>En $\lambda = 2$</u> le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} & y & -2z & = & 0 \\ x & -2y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ x = 2y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(4, 2, 1)$.

***Conclusion*** : $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\{(4, 2, 1)\} = \mathrm{Vect}\{u_3\}.}$

f) *Montrons que $\mathcal{B}_1 = (u_2, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ :*
Commençons par noter que $\mathrm{Card}(u_2, u_1, u_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc nous nous contenterons de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0$ $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = 0 & (L_1) \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_3 & = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 3\lambda_3 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_1 - L_3) \end{cases}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3 \text{ ; famille libre}}$

La famille $(u_2, u_1, u_3)$ étant formée de trois vecteurs, on en déduit qu' $\boxed{\text{il s'agit d'une base de } \mathbb{R}^3}$.

***Conclusion*** : $\boxed{\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

g) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de la famille de vecteurs $(u_2, u_1, u_3)$.
D'après la question précédente il est immédiat que $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\{u_2, u_1, u_3\} = 3 = ordre(P)$.

***Conclusion*** : $\boxed{P \text{ est inversible}}$

Inversons $P$ : Quels que soient les réels $x, y, z, a, b, c$ on a :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +4z & = & a \\ x & -y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +4z & = & a & \\ 2x & & +6z & = & a+b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & 3z & = & a-c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = & \frac{1}{6}a & -\frac{1}{2}b & +\frac{1}{3}c \\ x & = & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{2}b & +c \\ z & = & \frac{1}{3}a & & -\frac{1}{3}c \end{cases}$$

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

h) Par le calcul, il est immédiat que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

③ Soit $y$ une solution de $(\varepsilon_3')$ sur $\mathbb{R}$.

a) On a

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par $P^{-1}$ à gauche. Soit :

$$\boxed{P^{-1}Y' = DP^{-1}Y}$$

b) On pose $Z = P^{-1}Y$.
Connaissant $P^{-1}$, il suffit de faire le produit matriciel pour en déduire l'expression de $z_1$, $z_2$ et $z_3$ en fonction de $y$, $y'$ et $y''$.
A savoir :

$$z_1 = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$$
$$z_2 = \frac{1}{6}y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{3}y$$
$$z_3 = \frac{1}{3}y'' - \frac{1}{3}y$$

$y$ étant une solution de $(\varepsilon_3')$, on en déduit qu'elle est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, $y'$ est de classe $C^2$ et $y''$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, autrement dit $y, y'$ et $y''$ sont trois fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Il vient alors que $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) En dérivant les relations précédentes, on obtient :

$$z_1' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y'$$
$$z_2' = \frac{1}{6}y^{(3)} - \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{3}y'$$
$$z_3' = \frac{1}{3}y^{(3)} - \frac{1}{3}y'$$

Ou encore, puisque par hypothèse, $Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $\boxed{Z' = P^{-1}Y'}$.

La question 3.a) permet de conclure : $\boxed{Z' = P^{-1}Y' = DP^{-1}Y = DZ}$.

d) $Z' = DZ \Leftrightarrow Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ -z_2(x) \\ 2z_3(x) \end{pmatrix}$.

Reprenant en particulier l'expression de $z_1$, on en déduit : $\boxed{z_1' = z_1}$ La résolution des équations différentielles du premier ordre permet d'en déduire qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $z_1(x) = \lambda e^x$, pour tout réel $x$.

④ Détermination de l'ensemble $S_3'$ des solutions de $(\varepsilon_3')$ sur $\mathbb{R}$ :

a) D'après la question 3.b) on vient de prouver que $y$ vérifie l'équation différentielle

$$z_1(x) = \lambda e^x = -\tfrac{1}{2}y'' + \tfrac{1}{2}y' + y \text{ ou encore } (**) - y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(**)$ est $-r^2+r+2 = 0$, qui admet pour racines $-1$ et $2$ (après éventuel calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(**)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Quant à déterminer une solution particulière, on peut toujours dire que $y_p : x \longmapsto \lambda e^x$ est solution évidente... sinon on posera $y_p(x) = Q(x)e^x$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Dès lors :

$$y_p'(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x \text{ et } y_p''(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x$$

Soit

$$-y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) = (-Q''(x) - 2Q'(x) - Q(x) + Q'(x) + Q(x) + 2Q(x))\, e^x = (-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x))\, e^x = 2\lambda e^x$$

et puisque $e^x \neq 0$ pour tout $x$ réel, on a :

$$-Q''(x) - Q'(x) + 2Q(x) = 2\lambda \text{ et donc } \boxed{Q(x) = \lambda}$$

Au final, on voit que $y$ est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Si } y \in S_3',\ \exists (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x.}$

ou encore

***Conclusion*** : $\boxed{S_3' \subset Vect\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}}$

b) Pour établir la réciproque, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^{x}$ est bien une solution de $(\varepsilon_3')$ , ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= \left(-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^{x}\right) \\ &\quad -2\left(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^{x}\right) \\ &\quad -\left(-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^{x}\right) \\ &\quad +2\left(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^{x}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{S_3' = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x})}$$

⑤ On déduit du résultat ci-dessus que $S_3'$ est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x}$, à savoir par une famille finie de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour démontrer que celui-ci est de dimension 3, il suffit de mettre en évidence une base et, la famille ci-dessus étant génératrice, il suffit de prouver qu'elle est libre et pour cela revenons à la définition :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(***)$.
Cette égalité est en particulier vrai par passage à la limite en $-\infty$. D'où

$$\lambda_1 = 0$$

Donc $(***) \Rightarrow \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(***) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (x=0) \\ \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e & = 0 \quad (x=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 e + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

***Conclusion*** : $\boxed{(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x}) \text{ est une base de } S_3'}$.

ou encore :

***Conclusion*** : $\boxed{S_3' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 3.}}$

✐ **Remarque (Pour une lecture en fin d'année) :** Pour montrer que la famille $\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x}\}$ est libre, on peut aussi utiliser le cours « Réduction d'endomorphismes » en remarquant que $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x}$ sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes (en l'occurrence $-1, 2$ et $1$) de l'application linéaire $\Psi : f \mapsto f'$. Ce qui termine la démonstration...

⑥ Si $y(0) = 1$, $y'(0) = 0 = y''(0)$, *déterminons la solution analytique de* $(\varepsilon_3')$ *:*

D'après la question précédente, on sait que si $y$ est solution de $(\varepsilon_3')$, alors

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / y(x) = ae^{-x} + be^{x} + ce^{2x}$$

d'où l'on tire : $y'(x) = -ae^{-x} + be^{x} + 2ce^{2x}$ et $y''(x) = a^{x} + be^{x} + 4ce^{2x}$.

A l'aide des conditions initiales fournies, on obtient le système ci-dessous qu'il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} y(0) = a+b+c & = 1 \\ y'(0) = -a+b+2c & = 0 \\ y''(0) = a+b+4c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c & = 1 & L_1 \\ 2b+3c & = 1 & L_2+L_1 \\ 3c & = -1 & L_3-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = -1/3 \\ b & = 1 \\ a & = 1/3 \end{cases}$$

**Conclusion :** Il existe une unique solution de $(\varepsilon_3')$ vérifiant $y(0)=1$, $y'(0)=0=y''(0)$, à savoir :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + e^{x} - \frac{1}{3}e^{2x}}$$

⑦ *Une approximation numérique de la solution par la méthode d'Euler :*

Nous utilisons pour ça les notations suivantes : $y'(t)=v(t)$ et $y''(t)=a(t)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'écrire, puisque $y$ vérifie $(\varepsilon_3')$ :

$$\begin{cases} a'(t) = y'''(t) & = 2a(t)+v(t)-2y(t) \\ v'(t) & = a(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}$$

On rappelle alors que pour $h$ suffisamment petit :

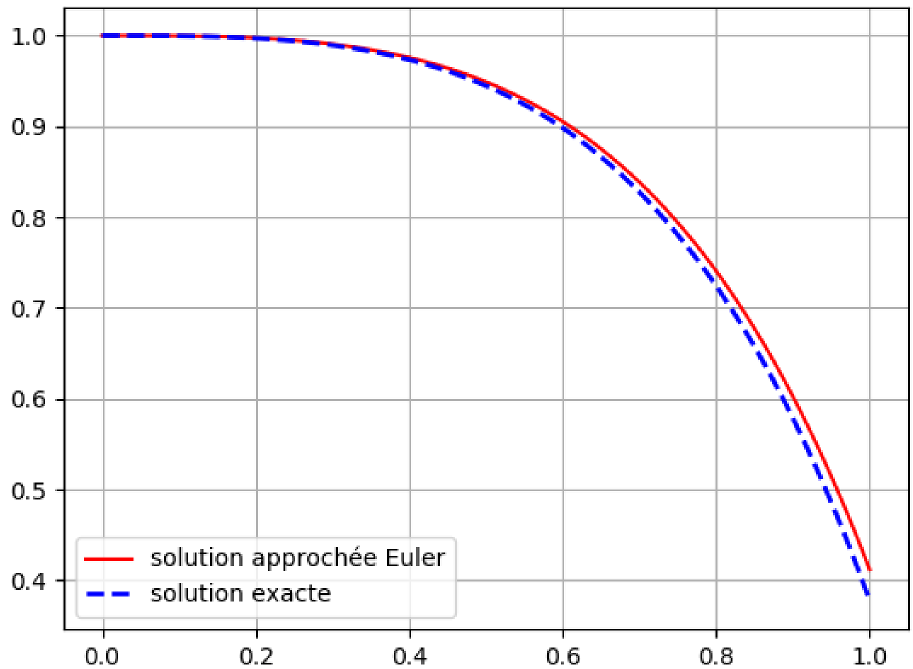
$$\begin{cases} a(t+h) & \approx a(t)+h\cdot a'(t) = a(t)+h(2a(t)+v(t)-2y(t)) = (1+2h)a(t)+hv(t)-2hy(t) \\ v(t+h) & \approx v(t)+h\cdot v'(t) = v(t)+ha(t) \\ y(t+h) & \approx y(t)+h\cdot y'(t) = y(t)+hv(t) \end{cases}$$

Prenons pour exemple $y(0)=1$, $y'(0)=0=y''(0)$. On construit ensuite une valeur approchée de la solution en prenant $y_0=1$, $v_0=0$ et $a_0=0$ puis en construisant pas à pas les valeurs successives de $y$, $v$ et $a$ qu'on notera $y_n$, $v_n$ et $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en posant :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = (1+2h)a_n + hv_n - 2hy_n \\ v_{n+1} & = v_n + ha_n \\ y_{n+1} & = y_n + hv_n \end{cases}$$

Soit :

```
def simulSolutionEe(y0,v0,a0,h,t0,tf):
    nbe_pas = int((tf-t0)/h)
    y = [0]*(nbe_pas+1)
    v = [0]*(nbe_pas+1)
    a = [0]*(nbe_pas+1)
    y[0],v[0],a[0] = y0,v0,a0
    for pas in range(nbe_pas):
       a[pas+1] = (1+2*h)*a[pas]+h*v[pas]-2*h*y[pas]
       v[pas+1] = v[pas]+h*a[pas]
       y[pas+1] = y[pas]+h*v[pas]
    return y,v,a
```


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
solution approchée Euler
solution exacte