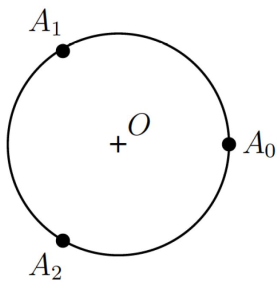
MATHEMATIQUES
algèbre linéaire

Le sujet se compose de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé.*
Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 :

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère un repère orthonormal du plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et le cercle unité $\mathcal{C}$ sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants $A_0, \ldots, A_{p-1}$ tels que A_0 soit d'affixe 1.
Ainsi pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, A_k est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.
Pour $p = 3$, on a la représentation suivante :



1 Résultats préliminaires

① On considère la matrice $D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et, par exemple, $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Inverser les matrices D_3 et D_4.
b) Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse.
On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p.

② Calculez $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k$. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

③ Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ z = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$.
On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$.

2 Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$. Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0; p-1]\!]$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n}. La variable aléatoire U_0 est donc constante égale à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et à $p-1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$. La variable U_2 est à valeurs dans $\{2; 0; p-2\}$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2) = \mathbb{P}(U_2 = p-2) = \frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}$.

5. Déterminer une matrice $M_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier n, on ait
$$X_{n+1} = M_p X_n.$$
Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.
6. Soit n un entier. Donner sans justifications l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n.
7. Vérifier que $M_p = \frac{1}{2}\left(D_p + D_p^{-1}\right)$.
8. On suppose ici que $p = 3$ et on admet que $M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles $M_3 - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   b) Déterminer pour chacune de ces valeurs de λ une base de l'espace vectoriel $E_\lambda(M_3)$ défini par $E_\lambda(M_3) = \ker(M_3 - \lambda I_3)$. Vérifier que pour tout $X \in E_\lambda(M_3)$, on a : $M_3 X = \lambda X$.
   c) Si on suppose que M_3 est la matrice d'un endomorphisme f_3 de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors $M_3 X = \lambda X \Leftrightarrow f_3(u) = \lambda u$.
   En déduire que M_3 et $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables et donner une matrice P, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_3 = PDP^{-1}$.
   d) Déterminer P^{-1}.
   e) Déterminer $\underset{n \to \infty}{lim} D^n$ et en déduire, pour tout $k \in [\![0; 2]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez le résultat obtenu.
9. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\exists X \neq 0 / D_p X = \lambda X$ alors $\lambda^p = 1$.

   En déduire p valeurs distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ pour lesquelles $D_p X_k = \lambda_k X_k$, avec $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

10. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. On cherche à montrer que Q est inversible :

    Pour ça on pose $R = Q^T$ et on considère le système homogène (S) : $RX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$.

    — Montrer que $1, z_1, \cdots z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots a_{p-1} X^{p-1}$.
    — Conclure que la seule solution de (S) est la solution nulle.
    — En déduire l'inversibilité de Q.

11. Posons $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v_k)$ ou $\mathcal{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Montrer que la famille $(v_0, v_1, \cdots, v_{p-1})$ est une base de $\mathbb{C}^p$.

12. Soit $D_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g_p)$ où g_p est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{B}_2$ est sa base canonique. Montrer que :

$$D_p = Q \Delta_p Q^{-1} \text{ où } \Delta_p = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$$

13. Justifier l'inversibilité de D_p et exprimer D_p^{-1} en fonction de Q et Δ_p.
    En déduire, en utilisant la question 7, qu'il existe une base de $\mathbb{C}^p$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f_p dont M_p est la matrice dans la base canonique, est diagonale. Donner cette matrice diagonale.

14. Montrer que M_p est semblable à $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\pi/p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$

15. On suppose dans cette question que p est impair.
    a) Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$.
    b) En déduire $\underset{n \to \infty}{lim} T_p^n$
    c) En déduire enfin, pour tout $l \in [\![0; p-1]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = l)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    d) Interprétez le résultat obtenu.

Problème 2 : Epreuve Agro-véto A 2011

Nous nous nous intéressons dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.

Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation differentielle :

$$\left(\varepsilon_3'\right)\ y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que : $Y' = AY$.

② Étudions quelques propriétés de la matrice A. Pour ça notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice, c'est-à-dire $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer le rang de f, son noyau et son image.

b) Déterminer le rang de $f - id_E$, montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_E$ et en déduire $\ker(f - id_E)$.

On pose $M_\lambda = A - \lambda I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $(S_\lambda) : M_\lambda \cdot X = 0$ le système homogène associé.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer sans le résoudre que $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / M_\lambda \cdot X = 0\}$, ensemble des solutions de (S_λ), est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

d) Montrer qu'il existe trois valeurs de λ réelles, dont l'une vaut 1, pour lesquelles le système homogène (S_λ) n'est pas un système de Cramer (ou encore pour lesquelles la matrice M_λ n'est **pas** inversible).
✐ On notera par la suite ces trois valeurs λ_1, λ_2 et λ_3 de telle façon que $\lambda_1 < \lambda_2 = 1 < \lambda_3$.

e) Résoudre (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}) et justifier que E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} sont de dimension 1.
✐ On donnera une base de chacun d'entre eux de telle façon que les vecteurs de base, nommés respectivement u_1, u_2 et u_3, aient leur troisième coordonnée égale à 1.

f) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_2, u_1, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **Attention à l'ordre des vecteurs**

g) Justifier que la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et l'inverser.

h) On rappelle que, si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}AP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Montrer que cette matrice est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

③ Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$.

b) On pose désormais $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}$.

Déterminer z_1, z_2 et z_3 en fonction de y, y' et y'' et justifier sans calcul qu'il s'agit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $Z' = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ z_3'(x) \end{pmatrix}$. Montrer que $Z' = P^{-1}Y'$ et en déduire $Z' = DZ$.

d) En déduire que $z_1'(x) = z_1(x)$ puis une expression de z_1.

④ Détermination de l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$:

a) Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.
Montrer que la question 3. permet d'en déduire que y est solution de l'équation différentielle :

$$-y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Résoudre cette équation et conclure que :

$$S_3' \subset Vect\{x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x\}$$

b) Déterminer alors l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.

⑤ Montrer que S_3' est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **de dimension** 3.

⑥ Si $y(0) = 1$, $y'(0) = 0 = y''(0)$, déterminer la solution analytique de (ε_3').

⑦ On souhaite écrire une fonction Python permettant de confronter graphiquement une approximation numérique utilisant la méthode d'Euler à la solution obtenue précédemment.
Pour ça, nous utilisons les notations suivantes : $y'(t) = v(t)$ et $y''(t) = a(t)$ pour tout $t \geq 0$ afin d'écrire, puisque y vérifie (ε_3') :

$$\begin{cases} a'(t) = y'''(t) & = 2a(t) + v(t) - 2y(t) \\ v'(t) & = a(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}$$

On rappelle alors que pour h suffisamment petit :

$$\begin{cases} a(t+h) & \approx a(t) + h \cdot a'(t) \\ v(t+h) & \approx v(t) + h \cdot v'(t) \\ y(t+h) & \approx y(t) + h \cdot y'(t \end{cases}$$

Montrer comment adapter la méthode d'Euler pour donner une représentation graphique de la fonction y sur l'intervalle $[t_0, t_f]$.