

Devoir maison 6 : Algèbre linéaire
Problème : Epreuve Agro-véto B 2015

① L'effectif de la population après s unités de temps, noté Z_s , vaut : $Z_s = \sum_{i=1}^p n_{s,i}$.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

- a) — Dans le cas de la dernière classe d'âge, le nombre d'individus dépend à la fois du nombre d'individus de la classe C_{p-1} qui ont survécu selon le coefficient P_{p-1} et du nombre d'individus qui étaient déjà dans cette dernière classe d'âge et qui ne sont pas mort, selon le taux P_p .

Dès lors : $n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p$.

- Pour toutes les autres classes, d'après les hypothèses du modèle, entre l'instant s et l'instant $s+1$, le nombre d'individus dans les classes C_i ($i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$) dépend uniquement du nombre d'individus dans la classe d'âge C_{i-1} qui précède et qui ont survécu selon un taux de survie désigné par la lettre P_{i-1} .

Soit $\forall i \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket, n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$

- b) $n_{s+1,1}$ est l'effectif de la classe d'âge C_1 après $(s+1)$ unités de temps.

Or dans C_1 se trouvent exactement tous ceux qui viennent de naître entre l'instant s et l'instant $s+1$. Il faut noter que les éléments qui étaient dans C_1 après s unités de temps sont, un instant plus tard, soit morts, soit dans C_2 , en tout cas ils ne sont plus dans C_1 . Ainsi :

$$n_{s+1,1} = n_{s,1}F_1 + n_{s,2}F_2 + \dots + n_{s,p}F_p = \sum_{i=1}^p n_{s,i}F_i.$$

- c) L'ensemble des relations précédentes peuvent se traduire sous la forme du système ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} n_{s+1,1} & = & F_1 \times n_{s,1} + F_2 \times n_{s,2} + F_3 \times n_{s,3} + \dots + F_{p-1} \times n_{s,p-1} + F_p \times n_{s,p} \\ n_{s+1,2} & = & P_1 \times n_{s,1} \\ n_{s+1,3} & = & P_2 \times n_{s,2} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{s+1,i} & = & P_{i-1} \times n_{s,i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{s+1,p-1} & = & P_{p-2} \times n_{s,p-2} \\ n_{s+1,p} & = & P_{p-1} \times n_{s,p-1} + P_p \times n_{s,p} \end{array} \right.$$

On traduit ceci matriciellement :

$$N_{s+1} = MN_s \text{ avec } M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & \dots & F_{p-1} & F_p \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_{p-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & P_{p-1} & P_p & 0 \end{pmatrix}.$$

③ *Étude d'un exemple.*

Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours). Nous choisissons une unité de temps u de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge.

Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0, F_2 = 13, F_3 = 12, P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Ici il y a trois classes d'âge donc, d'après 2.c) : $N_{s+1} = AN_s$ avec A la matrice d'ordre 3 qui

est donnée par : $A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}.$

Avec les données de l'énoncé, les drosophiles ne pouvant survivre au-delà de 30 jours, on a donc $P_3 = 0$.

Dès lors, on a bien :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout s dans $\mathbb{N}$ montrons par récurrence que : $\mathcal{P}(s)$: « $N_s = A^s N_0$. »

- Initialisation : Par définition $A^0 N_0 = I_3 N_0 = N_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : On fixe s dans $\mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(s)$ vraie.

Alors $N_s = A^s N_0$. Ainsi $AN_s = A.A^s N_0 = A^{s+1} N_0$.

Or, d'après 3.a), $AN_s = N_{s+1}$. On a donc : $N_{s+1} = A^{s+1} N_0$. Et ainsi $\mathcal{P}(s+1)$ est vraie.

- Conclusion : le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(s)$ est vraie pour tout entier s . Ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{N}, N_s = A^s N_0.$$

c) i. Soit (S_λ) le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Le système (S_λ) admet pour seule solution la solution nulle si et seulement si son rang vaut 3.

En conséquence, il admet au moins une solution non nul si, et seulement si, son rang qui est aussi celui de sa matrice associée $A - \lambda I_3$, est différent de 3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow 4L_2; L_3 \leftarrow 2L_3) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ -\lambda & 13 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 13 - 4\lambda^2 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 13 - 4\lambda^2 & 12 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + (4\lambda^2 - 13)L_2)
\end{aligned}$$

où $P(\lambda)$ est le polynôme :

$$P(\lambda) = 12 - 2\lambda(4\lambda^2 - 13) = -2(4\lambda^3 - 13\lambda - 6).$$

Ainsi $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si λ est une racine de P , c'est à dire une racine de $Q(X) = 4X^3 - 13X - 6$.

On remarque que : $Q(2) = 4 \times 8 - 13 \times 2 - 6 = 0$; $Q(-\frac{1}{2}) = \frac{-4}{8} + \frac{13}{2} - 6 = 0$.

Ainsi on peut factoriser Q pour chercher la dernière racine :

$$Q(X) = 4(X - 2)(X + \frac{1}{2})(X - \alpha).$$

Lorsqu'on développe et qu'on ne s'intéresse qu'au terme constant, ce terme vaut : $4 \times (-2) \times (\frac{1}{2}) \times (-\alpha) = 4\alpha$. Or il doit être égal à -6 , donc : $\alpha = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.

En conclusion :

$$A - \lambda I_3 \text{ non inversible si } \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -\frac{3}{2}; \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

On les a bien numérotées de façon à ce que $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

- ii. Résolvons ce système pour chacune des valeurs de λ et donnons dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans (S_{λ_1}) , (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}) .

Nous avons obtenu que la réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ est : $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$

donc $(S_\lambda) \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_\lambda X = 0$

- **Réolvons** S_{λ_1} : Avec $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32z \\ y = 4z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=2)} = Vect(v_1)}$ avec $v_1 = (32, 4, 1)$.

- **Réolvons** S_{λ_2} : Avec $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} (A + \frac{3}{2}I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_{-3/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6y \\ y = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18z \\ y = -3z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=-3/2)} = Vect(v_2)}$ avec $v_2 = (18, -3, 1)$.

- **Réolvons** S_{λ_3} : Avec $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} (A + \frac{1}{2}I_3)X = 0 &\Leftrightarrow B_{-1/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=-1/2)} = Vect(v_3)}$ avec $v_3 = (2, -1, 1)$.

iii. Montrons que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

— Montrons que cette famille est libre : Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3 / \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (*).

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -14\alpha_2 - 30\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 32L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -20\alpha_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 \end{aligned}$$

Conclusion : La famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

— De plus cette famille contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est connue et vaut 3, donc :

— **Conclusion :** La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

iv. La matrice P qui est demandée est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
On a donc par construction :

$$P = \begin{pmatrix} 32 & 18 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible car $\text{rg}(P) = \text{rg}(\mathcal{B}') = 3 = \text{ordre}(P)$.

Pour calculer P^{-1} on passe par la résolution du système (S) $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Après de longs calculs... (à faire), on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/70 & 4/35 & 3/35 \\ 1/28 & -3/14 & -2/7 \\ -1/20 & 1/10 & 6/5 \end{pmatrix}$$

On peut alors en déduire par produit matriciel que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = D \text{ (matrice diagonale)}$$

☞ *Remarque pour une lecture de ce corrigé en fin d'année :* On pouvait remarquer le fait que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres de A . Autrement dit, on a immédiatement (et sans calculs fastidieux...) :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 32 & 18 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) **Comportement asymptotique de la population.**

Désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons (c_1, c_2, c_3) les coordonnées de N_0 dans la base $\mathcal{V}$.

i. *Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$: $AV_i = \lambda_i V_i$ et plus généralement que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$:*
Il suffit de noter que v_i est solution du système homogène (S_{λ_i}) . Autrement dit :

$$(A - \lambda_i I_3)V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i - \lambda_i V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i$$

C'est ensuite par récurrence immédiate qu'on montre que la proposition

$$(\mathcal{P}_s) : A^s V_i = \lambda_i^s V_i \text{ est vraie pour tout } s \in \mathbb{N}$$

— Pour $s = 0$, $A^0 V_i = I_3 V_i = V_i = \lambda_i^0 V_i$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

— On suppose que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ est vraie pour s fixé ($s \geq 0$)

- Alors $A^{s+1}V_i = A \cdot A^s V_i = A \cdot (\lambda_i^s V_i) = \lambda_i^s A V_i = \lambda_i^s \cdot \lambda_i V_i = \lambda_i^{s+1} V_i$.
Donc $(\mathcal{P}_{s+1})$ est vraie.
- **Conclusion** : $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ pour tout $s \geq 0$

ii. Montrons que : $\forall s \in \mathbb{N}, N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s c_3 V_3$.

$$\begin{aligned} N_s &= A^s N_0 \quad (\text{d'après (3.2)}) \\ &= A^s (c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) \\ &= c_1 A^s V_1 + c_2 A^s V_2 + c_3 A^s V_3 \\ &= (\lambda_1^s c_1) V_1 + (\lambda_2^s c_2) V_2 + (\lambda_3^s c_3) V_3. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{N}, N_s = (\lambda_1^s c_1) V_1 + (\lambda_2^s c_2) V_2 + (\lambda_3^s c_3) V_3.$

iii. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 lorsque s tend vers $+\infty$:

On a alors : $N_s = \lambda_1^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$ avec : $\varepsilon_s = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s c_2 V_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s c_3 V_3$.

Or $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ et $\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| < 1$, donc $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^s = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^s = 0$. Ainsi on a bien :

$N_s = \lambda_1^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$ avec les ε_s qui tendent tous vers 0 quand s tend vers $+\infty$.

iv. Montrons que les différents rapports $\frac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\frac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque s tend vers

$+\infty$ et la calculons. On a, en notant $\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{s,1} \\ \varepsilon_{s,2} \\ \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$: $N_s = \lambda_1^s \begin{pmatrix} 32c_1 + \varepsilon_{s,1} \\ 4c_1 + \varepsilon_{s,2} \\ c_1 + \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$.

Autrement dit :

$n_{s,1} = \lambda_1^s (32c_1 + \varepsilon_{s,1}) \quad ; \quad n_{s,2} = \lambda_1^s (4c_1 + \varepsilon_{s,2}) \quad ; \quad n_{s,3} = \lambda_1^s (c_1 + \varepsilon_{s,3}).$

Remarquons que c_1 est non nul. En effet, si $c_1 = 0$ on aurait : $N_s = (-3/2)^s c_2 V_2 + (-1/2)^s c_3 V_3$, ce qui rendrait des coordonnées de N_s négatives pour certaines valeurs de s , ce qui est absurde (on signale aussi que par modélisation c_1, c_2, c_3 ne peuvent pas être tous nuls sinon la population est réduite à 0 individus dès le départ!).

On a ainsi, lorsque $s \rightarrow +\infty$:

$$\tau_1 = \frac{n_{s,1}}{n_{s,3}} = \frac{32c_1 + \varepsilon_{s,1}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \rightarrow 32.$$

$$\tau_2 = \frac{n_{s,2}}{n_{s,3}} = \frac{4c_1 + \varepsilon_{s,2}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \rightarrow 4.$$

Interprétons : A long terme, la répartition selon les classes d'âge dans la population sera environ la suivante : il y aura 32 fois plus d'individus dans la classe d'âge C_1 que dans C_3 , et il y aura 4 fois plus d'individus dans la classe d'âge C_2 que dans C_3 .

- ④ a) On propose la rédaction suivante :

```
def Norme(M):
    # Calcule la norme de M
    d=M.shape
    m=d[0] # m=nombre de lignes de M
    n=d[1] # n=nombre de colonnes de M
    C=abs(M[0,0])
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            if abs(M[i,j])>C:
                C=abs(M[i,j])
    return(C)
```

En effet : la norme de M est un maximum. Donc on initialise C égal à $|M[0,0]|$ (ou à la valeur absolue de n'importe quel terme de la matrice en fait), puis on parcourt la matrice à l'aide de deux boucles *for*. Ensuite, on compare chaque nombre $|M[i,j]|$ à C , et si $|M[i,j]| > C$ alors C prend la valeur $|M[i,j]|$. Une fois que les boucles sont terminées, C est bien égal au maximum des $|M[i,j]|$.

- b)

```
def Normalise(v):
    # Normalise un vecteur v
    return(v/Norme(v))
```

En effet, on utilise la fonction $Norme(M)$ écrite en (1).

- c)

```
def PuissanceIteree(A,n):
    p=A.shape[0] # p=Taille de A
    v=matrix(random.rand(p,1))
    for i in range(n):
        v=Normalise(A*v)
    return(v)
```

Explication : On initialise v égal à une matrice colonne aléatoire. Puis, avec une boucle *for*, on calcule de proche en proche $v_1, v_2, \dots, v_n$, en utilisant la fonction $Normalise(v)$ créée dans la question (2). En sortie de boucle, la matrice colonne v correspond au dernier terme calculé, c'est à dire v_n .

Remarque (non demandée) : en exécutant effectivement ces fonctions dans Python avec la matrice A obtenue dans le problème 1, on observe ce qui est annoncé : lorsque n augmente (v_n) se rapproche du vecteur $\frac{V_1}{\|V_1\|}$, autrement dit ($32v_n$) se rapproche de V_1 :

```
In [75]: A=matrix([[0,13,12],[0.25,0,0],[0,0.5,0]])
In [76]: 32*PuissanceIteree(A,20)
Out[76]: matrix([[ 32.],[4.03258664],[0.99728445]])
In [77]: 32*PuissanceIteree(A,20)
Out[77]: matrix([[ 32.],[4.02958654],[0.99753446]])
In [78]: 32*PuissanceIteree(A,100)
Out[78]: matrix([[ 32.],[4.],[1.]])
```

```
In [79]: 32*PuissanceIteree(A,100)
Out[79]: matrix([[32.],[4.],[1.]])
```

- d)

Les programmes A et C sont corrects (et similaires).
--

Le programme B est incorrect.

- En effet, dans le programme B, *ecart* est calculé avant la boucle *while* mais n'est pas recalculée ensuite. Par conséquent, si la boucle démarre, elle sera infinie !