Devoir maison 6 : Algèbre linéaire

Problème : Les matrices de Leslie

Dans une population, tous les individus n'ont pas le même potentiel de reproduction, ni la même probabilité de survie d'une année à l'autre. De même, l'âge est un facteur important. Nous choisissons alors une unité de temps $u \in \mathbb{R}_+$ et nous décidons de découper la population en p classes d'âges de même amplitude (à l'exception de la dernière classe), $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Une classe d'âge C_i, $i \in [\![1, p-1]\!]$ est donc caractérisée par la donnée d'un âge minimum $(i-1)u$, et la donnée d'un âge maximum $iu - 1$. La classe d'âge C_p est caractérisée par la seule donnée d'un âge minimum $(p-1)u$.

Par exemple, dans le cadre d'une population d'êtres humains, nous choisissons une unité de temps u de quinze années et nous découpons la population en 5 classes d'âge ($p = 5$). La classe C_1 inclus les êtres humains d'âge compris entre 0 et 14 ans, la classe C_2 les êtres humains d'âge compris entre 15 et 29 ans, la classe C_3 les êtres humains d'âge compris entre 30 et 44 ans, la classe C_4 les êtres humains d'âge compris entre 45 et 59 ans, la classe C_5 incluant les êtres humains âgés d'au moins 60 ans.

Pour $s \in \mathbb{N}$, nous décidons de représenter la population après s unités de temps par la matrice $N_s \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$N_s = \begin{pmatrix} n_{s,1} \\ n_{s,2} \\ \vdots \\ n_{s,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $n_{s,i}$ désigne l'effectif de la i-ème classe d'âge de la population au début de la s-ième unité de temps.
N_0 représente donc l'état initial de la population, N_1 la population après 1 unité de temps, N_2 la population après 2 unités de temps, etc.

① Pour $s \in \mathbb{N}$, exprimer l'effectif total de la population après s unités de temps.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i désigne le taux de fécondité de la i-ième classe d'âge, à savoir le nombre de naissances par unité de temps pour un individu de la i-ème classe d'âge.
De même, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, P_i désigne le taux de survie pour un individu entre la classe d'âge C_i et la classe d'âge C_{i+1}.
On note P_p le taux de survie au sein de la p-ième et dernière classe d'âge. Les survivants restent alors au sein de cette classe d'âge.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) Justifier pour tout $i \in [\![2, p-1]\!]$ la relation : $n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$ ainsi que $n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p$

b) Exprimer $n_{s+1,1}$ en fonction de $n_{s,1}, n_{s,2}, \cdots, n_{s,p}$ et de $F_1, F_2, \cdots, F_p$.

c) Proposez une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $N_{s+1} = M \cdot N_s$.

③ *Étude d'un exemple.*
Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours). L'unité de temps choisie u est de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge.
Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0,\ F_2 = 13,\ F_3 = 12,\ P_1 = \frac{1}{4},\ P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_{s+1} = AN_s$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_s = A^s \cdot N_0$.

c) i. Soit (S_λ) le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Montrer que le système (S_λ) admet au moins une solution non nulle (ce n'est pas un système de Cramer) pour trois valeurs distinctes de λ parmi lesquelles on trouve $\lambda = 2$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Les trois valeurs de λ seront notées λ_1, λ_2, λ_3 telles que : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

ii. Résoudre ce système pour chacune des valeurs de λ et donner dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}), exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

iii. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

iv. Soit P la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
En déduire que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale qu'on précisera.

Désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Comportement asymptotique de la population.
Notons (c_1, c_2, c_3) les coordonnées de N_0 dans la base $\mathcal{V}$.

i. En utilisant la question c)i, montrer que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$: $AV_i = \lambda_i V_i$ et en déduire que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ pour tout entier naturel s.

ii. Montrer que : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s V_3$.

iii. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 lorsque s tend vers $+\infty$.

iv. Montrer que les différents rapports $\dfrac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\dfrac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque s tend vers $+\infty$ et la calculer. Interpréter votre réponse.

④ On a montré à la question 3.d)iii. que la matrice colonne N_s représentant la population tend à devenir colinéaire avec le vecteur V_1, solution du système (S_{λ_1}) où λ_1 est la plus grande valeur réelle pour laquelle (S_λ) n'est pas un système de Cramer.
On dira que V_1 est un « vecteur propre de A » associé à la valeur propre λ_1 et l'objectif de cette partie est d'approcher numériquement V_1 à partir de la seule matrice A...

✐ *Quelques fonctions utiles ont rappelées en annexe à la fin du sujet. On rappelle que chaque programme doit être commenté par une phrase détaillant le raisonnement qui a conduit à son élaboration.*

Notons $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels, et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées. À chaque matrice $\mathrm{M} = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on associe un nombre réel positif $\|\mathrm{M}\|$, appelé norme de M, défini par

$$\|\mathrm{M}\| = \max_{i,j} |m_{ij}| \,.$$

Remarquons que $\|M\|$ est toujours strictement positif, sauf lorsque la matrice M est nulle.

a) Écrire une fonction `Norme(M)` qui étant donnée une matrice M de taille quelconque calcule et renvoie le nombre $\|\mathrm{M}\|$. On interdit le recours à une quelconque fonction max prédéfinie pour cette question.

b) Écrire une fonction `Normalise(v)` qui étant donnée une matrice colonne $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ non nulle renvoie une nouvelle matrice colonne $\tilde{v}$, de même forme, égale à

$$\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}.$$

On se donne à présent une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit v_0 un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. En supposant qu'aucun des termes n'est dans le noyau de A, on peut former la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \frac{\mathrm{A}v_n}{\|\ \mathrm{A}v_n\|}.$$

c) Écrire une fonction `PuissanceIteree(A, n)` qui étant donnée une matrice carrée A et un entier naturel n, détermine la taille p de A, choisit aléatoirement une matrice colonne $v_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, puis calcule et renvoie, en supposant que tous les termes de la suite ci-dessus sont bien définis, la matrice colonne v_n.

On peut montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable (c'est-à-dire telle que la matrice A étudiée à la question 3.), et possède les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$$

alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ ci-dessus existe et ses composantes convergent vers les composantes d'un vecteur propre v de A associé à la valeur propre λ_1, sauf pour quelques choix de v_0. La probabilité, en choisissant aléatoirement v_0, de tomber sur l'une des exceptions est nulle.
Vérifier cette assertion en vous appuyant sur la matrice A et les résultats de l'exemple 3.

On se propose d'écrire maintenant une fonction `VecteurPropre(A, e)` qui étant donnée une matrice carrée A satisfaisant les hypothèses ci-dessus et un nombre $e > 0$ calcule les termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ jusqu'à ce que deux termes successifs vérifient $\|v_n - v_{n+1}\| < e$ et renvoie alors la matrice colonne v_{n+1}.

Voici trois propositions de programmes :

```python
import numpy as np
import numpy.random as nrdm

def VecteurPropre_v1(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    while Norme(v-w) >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w

def VecteurPropre_v2(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    ecart = Norme(v-w)
    while ecart >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w

def VecteurPropre_v3(A, e):
    d = A.shape
    v = np.matrix(nrdm.rand(d[0], 1))
    v = Normalise(v)
    while Norme(v - Normalise(A*v)) >= e:
        v = Normalise(A*v)
    return Normalise(A*v)
```

d) Parmi ces trois programmes, indiquer lequel est (ou lesquels sont) correct(s). Pour chaque programme *incorrect* on indiquera succinctement ce qui ne va pas.

ANNEXE

On donne ci-dessous la description de quelques fonctions qui pourront être utiles dans le deuxième problème.
En Python, on utilise la librairy `NumPy` qui est supposée importée en exécutant :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as nrdm`

Interprétation	**Python**
Construction d'une nouvelle matrice de taille $m \times n$, ne contenant que des zéros	`np.matrix(np.zeros((m,n)))`
Matrice identité de taille p	`np.matrix(np.eye(p))`
Construction d'une nouvelle matrice de taille $m \times n$, remplie avec des coefficients choisis aléatoirement dans $[0;1[$	`np.matrix(nrdm.rand(m,n))`
Copie de la matrice A dans une nouvelle matrice B	`B = np.matrix(A)`

Dimensions de la matrice A
- nombre de lignes
- nombre de colonnes
	`d = A.shape`
	`d[0]`
	`d[1]`

Opérations matricielles (pour des matrices A et B de tailles compatibles)	`A + B`, `A - B`, `A * B`
Coefficient d'indices (i,j) dans la matrice M	`M[i,j]`