

CORRECTION T.D. 13.

Applications linéaires.

Exercice n° 2: Deux réductions sont possibles.

1) Réduction 1. Tout automorphisme de $\mathbb{R}^3$ est de la forme:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Par hypothèse:

$$\begin{cases} f(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (0, 0, 0) \\ (a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33}) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 = a_{21} = a_{31} \\ a_{12} = -a_{13}; a_{22} = -a_{23} \text{ et } a_{32} = -a_{33} \end{cases}$$

Donc: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$$f(x, y, z) = (a_{12}y - a_{13}z; a_{22}y - a_{23}z; a_{32}y - a_{33}z) \text{ où } a_{12}, a_{22} \text{ et } a_{32} \text{ sont 3 réels quelconques.}$$

On nous demande d'en trouver un particulier.

on prend par exemple $a_{12} = 0, a_{22} = 1 = a_{32}$.

Conclusion: $f: (x, y, z) \mapsto (0, y - z, z - y)$ vérifie les hypothèses.

2) Réduction 2 Soit $A = \mathcal{M}_B(f)$ où B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

A est la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ exprimées dans la base canonique.

Or, par hypothèse, $f(e_1) = f(u) = 0$

et $f(v) = f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = f(e_2) + f(e_3) = 0$

Donc, si $f(e_2) = (a, b, c)_B$ alors $f(e_3) = -f(e_2)$

Conclusion

$$A = \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & b & -b \\ 0 & c & -c \end{pmatrix}, \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Remarque: il suffit de prendre $a = 0, b = 1 = c$ pour retrouver l'endomorphisme proposé en exemple lors de la première réduction.

Exercice n° = 3. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

- ① f injective $\Leftrightarrow \dim(\text{Ker } f) = 0$
 $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = 4 - \dim(\text{Ker } f)$ d'après le
th. du rang.
 $\Leftrightarrow \dim(\text{Im } f) = 4.$

or $\text{rg}(f) \leq \inf \{ \dim(\mathbb{R}^4), \dim(\mathbb{R}^3) \}$

c'est-à-dire $\text{rg}(f) \leq 3$; conclusion: $\text{rg}(f) = 4$ impossible.

ou encore f n'est pas injective

- ② f surjective $\Leftrightarrow \dim(\text{Im } f) = 3 \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 3$

$\Leftrightarrow A = \mathcal{M}_{\beta_4, \beta_3} (f) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & a & -2 \\ -15 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Par application de la méthode du pivot de Gauss, on obtient:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|l} \boxed{3} & -1 & 5 & -1 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 6 & -1 & a & -2 & L_2 \leftarrow L_1 \\ -15 & 1 & 3 & 5 & L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \right)$$

$$= \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|l} 3 & -1 & 5 & -1 & \\ 0 & \boxed{1} & a-10 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 & -4 & 28 & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{array} \right)$$

$$= \text{rg} \left(\begin{array}{cccc|l} 3 & -1 & 5 & -1 & \\ 0 & 1 & a-10 & 0 & \\ 0 & 0 & 4a-12 & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array} \right) = \text{rg}(U)$$

conclusion $\text{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow 4a-12 = 4(a-3) \neq 0$
 $\Leftrightarrow a \neq 3.$

f surjective si, et seulement si, $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Dans le cas: $(x, y, z, t) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 5z - t = 0 \\ y + (a-10)z = 0 \\ 4(a-3)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 & (L_3) \\ y = 0 & (L_2) \\ 3x - t = 0 \end{cases}$$

conclusion $\text{Ker } f =$