7 Systèmes et calcul matriciel.

Systèmes linéaires équivalents. Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss via les opérations élémentaires, à savoir : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autre.
Rang d'un système, c'est-à-dire son nombre de pivots après réduction.
Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme de Newton dans le cas de deux matrices qui commutent.
Transposée d'une matrices. Écriture matriciel d'un système. Rang d'une matrice.
Matrices carrées inversibles. Expression dans le cas particulier des matrices 2×2.

Exercice 1 :

Résoudre par la méthode du Gauss les systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues réelles :

$$(S_1) \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y+z &= 6 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \\ x+3y+5z &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_3) \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= -1 \\ x+3y+5z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 2 : systèmes d'équations linéaires avec paramètres

① Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(S_1) \begin{cases} ax+y+z &= 0 \\ x+ay+z &= 0 \, ; \\ x+y+az &= 0 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} ax+y+z &= 4 \\ x+by+z &= 3 \\ x+2by+z &= 4 \end{cases}$$

② Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les systèmes ci-dessous n'admettent pas que la solution nulle.
Résoudre alors les systèmes pour chacune des valeurs de λ obtenues :

$$(S_1) \begin{cases} x+y &= \lambda x \\ -x+2y+z &= \lambda y \, ; \\ x+z &= \lambda z \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -(2+\lambda)x-2y+z &= 0 \\ -2x+(1-\lambda)y-2z &= 0 \\ x-2y-(2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \text{et } (S_3) \begin{cases} (3-\lambda)x+2y+4z &= 0 \\ 2x-\lambda y+2z &= 0 \\ 4x+2y+(3-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Produit matriciel

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On cherche à résoudre l'équation d'inconnues réelles : $(xI_3 + yA)^2 = I_3$.

① Calculer A^2.

② Soient $z, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $zA + tI = 0 \Leftrightarrow z = 0 = t$.

③ Conclure.

Exercice 4 ✶✶ : Sommes usuelles

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les matrices

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

② Montrer que la matrice R_α est inversible. Calculer son inverse.

③ Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $SR_\alpha S$ et pour tout entier naturel n calculer R^n.

④ En calculant de deux façons différentes $(R_\alpha + R_{-\alpha})^n$, exprimer $\cos^n(\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\cdots$, $\cos(n\alpha)$.

Exercice 5 : Puissances d'une matrice

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✐ pour A_4^n, on commencera par poser $B_4 = A_4 - 3I_3$ et par déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $B_4^2 = \alpha B_4$.

Exercice 6 : Puissances d'une matrice

On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

① Vérifier que $N^2 = -2N + 3I_3$.

② Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$N^{n+1} = u_n N + v_n I_3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Préciser notamment la relation qui existe entre (u_n, v_n) et (u_{n+1}, v_{n+1}).

③ Vérifier que $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.

④ En déduire que $u_{n+1} = -3u_n + 1$.

⑤ Exprimer (u_n, v_n) en fonction de n

Exercice 7 : Suites enchevêtrées

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$

① Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = A \cdot X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

② En déduire la forme explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 : Inversibilité

Dire dans chaque cas si la matrice est inversible et dans ce cas, calculer son inverse.

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

② $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

③ Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles elles ne sont pas inversibles :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad N_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -7 \\ 2 & 3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

④ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $A^2 = aA + bI$.
b. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

① **a.** Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
b. Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$.
c. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et T.
d. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.

② **a.** On définit la matrice N en écrivant $T = I_3 + N$. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^k si $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
b. Déterminer T^n en fonction de n et de N, puis de n uniquement.
c. Montrer que $P \cdot N \cdot P^{-1} = A - I_3$ et que $P \cdot N^2 \cdot P^{-1} = A^2 - 2A + I_3$.
d. Donner l'expression de A^n en fonction de n, I_3, A et A^2.