MATHEMATIQUES
Variables aléatoires discrètes et Equations différentielles

L'usage de la calculatrice ***n'est pas autorisé*** *au cours de l'épreuve. Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*
Remarque : Je place un « ☺ »pour les questions les plus accessibles. Il y en a jusqu'à la toute fin du sujet et j'en compte 25. Prenez le temps de toutes les lire !
Chronologie estimée : exercice : 45mn ; Problème 1 : 45mn ; problème 2 : 1h30.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

① $y' - 2y + e^x = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. ☺

② $(1 - x^2)y' + 2xy - 4x = 0$ sur $I =]1, +\infty[$ avec $y(2) = -1$. ☺

③ $xy' - y + \ln(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 0$. ☺

✐ *indication* : Pour 2. une solution évidente existe et pour 3., en cas de variation de la constante, on pensera à une intégration par parties.

Exercice 2

On considère l'équation différentielles $(\mathcal{E})$: $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$.

① Résoudre $(\mathcal{E})$ en cherchant une solution particulière sous forme polynomiale. ☺
Déterminer l'unique solution f de $(\mathcal{E})$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

② Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{(n)}(0)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

③ Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1 : Epreuve Agro-véto A 2019

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n-ème lancer on obtient un face »
On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

① Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(T = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. ☺

② On rappelle que $\mathbb{E}(X)$ existe si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument et, sous cette condition, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si elle existe. ☺

③ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$ en l'exprimant à l'aide d'une somme.

④ Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $(T > n + m) \subset (T > n)$ puis comparer $P_{(T>n)}(T > n + m)$ et $P(T > m)$.
Donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc S est égal à 3 si et seulement si on a obtenu un pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \mathbb{P}(S = n)$ et $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

① Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4. ☺

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathbb{P}(S > n) = q_n$. ☺

③ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0,1]$ ☺ puis que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = q_n/8$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.

⑤ En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in N^*}$ et en donner une interprétation.

On dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.
Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

⑥ En pensant au système complet d'événements $\{\overline{F_1}, F_1\}$ montrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.

⑦ Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$. On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. ☺

⑧ q_1 et q_2 étant connus, justifier qu'il existe des réels A et B (qu'on ne cherchera pas à exprimer !) tels que :

$$\begin{cases} A\,r_1 + B\,r_2 & = & q_1 \\ A\,r_1^2 + B\,r_2^2 & = & q_2 \end{cases}$$

⑨ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = Ar_1^n + Br_2^n$. ☺

⑩ En déduire que $q_n \underset{n\to\infty}{\sim} Br_2^n$.

Problème 2 : Epreuve Agro-véto B 2018

L'équation de Michaelis-Menten permet de décrire la cinétique d'une réaction catalysée par une enzyme notée E agissant sur un substrat unique noté S pour donner un produit P. Elle relie la vitesse de la réaction à la concentration de substrat et à des paramètres constants, caractéristiques de l'enzyme.

On considère que la vitesse de chacune des réactions est proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Dans la suite, et pour simplifier les écritures, on notera les différentes concentration (exprimées en $mol.L^{-1}$) par des lettres minuscules :

$$s = [S],\ e = [E] \text{ et } p = [P],$$

en remarquant que les concentrations sont des fonctions dépendant du temps.
On complète cette introduction en précisant les conditions initiales, à savoir :

$$s(0) = s_0,\ e(0) = e_0,\ c(0) = 0 \text{ et } p(0) = 0 \text{ avec } s_0 > 0 \text{ et } e_0 > 0.$$

L'objectif de cette partie est d'étudier la vitesse $\dfrac{dp}{dt}$ à laquelle le produit se forme en admettant que :

$$\frac{dp}{dt}(t) = \frac{v_{max} \times s(t)}{K_M + s(t)} \text{ où } K_M \text{ et } v_{max} \text{ sont deux constantes réelles strictement positives.}$$

1.1. Étude du modèle

On considère l'équation suivante, appelée équation de Michaelis-Menten :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_{max} \times s}{K_M + s}$$

Pour étudier cette équation, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction de Michaelis-Menten, notée f, par :

$$f(s) = \frac{v_{max} \times s}{K_M + s}$$

① Montrer que la fonction f est croissante et déterminer ses limites aux bords du domaine de définition. ☺

② Pour quelle valeur de s a-t-on $f(s) = \dfrac{v_{max}}{2}$? ☺

③ Tracer la courbe représentative de f et y faire figurer des informations pertinentes (comme par exemple la tangente en 0). ☺

1.2. Identification expérimentale des paramètres

Dans la suite, la quantité $\dfrac{dp}{dt}(t)$ est notée $v(t)$. On note par ailleurs v_i la vitesse initiale et on obtient :

$$v_i = \frac{v_{max} s_0}{K_M + s_0}$$

On utilise dorénavant une approche, mise au point par Lineweaver et Burk, afin de déterminer expérimentalement K_M et v_{max}.

① Établir une relation de la forme $\dfrac{1}{v_i} = \alpha \cdot \dfrac{1}{s_0} + \beta$ où les constantes α et β sont à déterminer. ☺

② Expliquer comment on peut déterminer graphiquement les paramètres K_M et v_{max} à partir des données expérimentales.

On se propose d'appliquer l'approche précédente sur des résultats expérimentaux de Michaelis et Menten concernant l'hydrolyse de saccharose sous l'action d'une enzyme, l'invertase. Le tableau suivant donne les vitesses initiales en fonction des concentrations initiales en saccharose pour 7 expérimentations, ainsi que leurs inverses arrondis à l'unité.

N° d'expérience	s_0 (en $mol.L^{-1}$)	v_i (en $mol.L^{-1}.min^{-1}$)	s_0^{-1}	v_i^{-1}
1	0.330	$3.636.10^{-3}$	3	275
2	0.1670	$3.636.10^{-3}$	6	275
3	0.0833	$3.236.10^{-3}$	12	309
4	0.0416	$2.666.10^{-3}$	24	375
5	0.0208	$2.114.10^{-3}$	48	473
6	0.0104	$1.466.10^{-3}$	96	682
7	0.0052	$0.866.10^{-3}$	192	1155

③ Reporter sur le graphique de l'annexe 1 les couples (s_0^{-1}, v_i^{-1}). ☺

④ Proposer des valeurs approchées de K_M et v_{max} avec une précision en accord avec l'approche utilisée. ☺

1.3. Étude informatique de données expérimentales

✐ *Remarque :* Les extraits de code matérialisés par des `---` correspondent à des portions à compléter.
Dans cette partie, on suppose que le fichier Python débute par l'importation du module `matplotlib.pyplot` et par la définition des deux listes `Ls` et `Lv`, de la façon suivante :

```
import matplotlib.pyplot as plt
Ls = [0.333,0.167,0.0833,0.0416,0.0208,0.0104,0.0052]
Lv = [3.636,3.636,3.236,2.666,2.114,1.466,0.866]
```

① a) Écrire une fonction `inv` qui prend en entrée une liste de nombres (supposés non nuls) `L` et qui renvoie la liste composée des inverses de ces nombres. ☺

b) Écrire une version améliorée `inv_ex` de la fonction `inv` qui prend en entrée une liste de nombres `L`, puis : si un de ces nombres est nul, alors elle renvoie le booléen `False`, sinon elle renvoie la liste composée des inverses de ces nombres. ☺

c) Quelle ligne de code écrire en Python afin qu'elle effectue le tracé demandé en question 3 de la partie 1.2 (les points seront représentés par des petits cercles et ne seront pas reliés entre eux). ☺

② a) On suppose écrites deux fonctions `moyenne(X)` et `variance(X)` qui prennent en entrée une liste `X` et qui renvoient respectivement sa moyenne et sa variance ainsi qu'une fonction `cov(X, Y)` qui renvoie la valeur de la covariance de `X` et `Y` si elle existe et le booléen `False` sinon.
Si on note $X = [x_1, ..., x_n]$ et $Y = [y_1, \cdots, y_n]$, rappeler la définition de $\overline{X}$, s_X^2 et $s_{X,Y}$.

b) On considère les fonctions `Coef` et `Trace` suivantes :

```
def Coef(X,Y):
   a = cov(X,Y)/variance(X)
   b = moyenne(Y)-cov(X,Y)/variance(X)*moyenne(X)
   return([a,b])

def Trace(X,Y):
   [a,b] = Coef(X,Y)
   xmin = min(X) ; xmax = max(X)
   plt.plot(X,Y,"*")
   plt.plot( ------- )
   plt.plot([moyenne(X)],[moyenne(Y)],"s")
   plt.grid()
   plt.show()
```

i. Compléter la fonction `Trace` afin de tracer le segment dont les extrémités sont `(xmin,a*xmin+b)` et `(xmax,a*xmax+b)`.

ii. Donner l'équation de la droite qui passe par ces deux points. ☺

iii. Quel nom porte cette droite. ☺

iv. On exécute la fonction `Trace` pour des listes `X` et `Y` quelconques de taille 7. Pour chacun des trois tracés suivants, indiquer s'il peut être ou non le résultat de `Trace` ? ☺

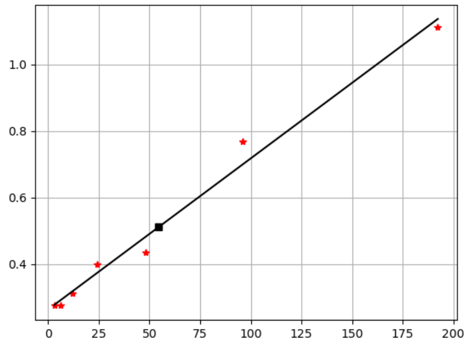

FIGURE 1 – Tracé 1

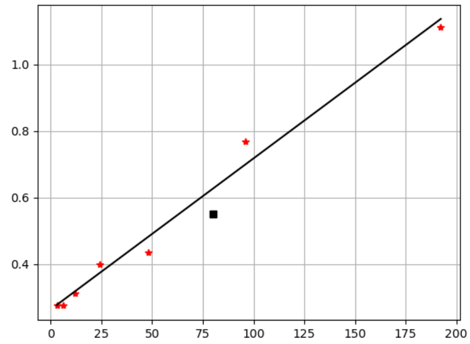

FIGURE 2 – Tracé 2

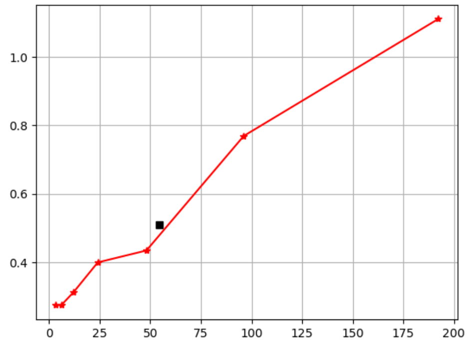

FIGURE 3 – Tracé 3

c) i. En utilisant les fonctions et variables qui précèdent, proposer un code qui calcule les valeurs de K_M et v_{max} en suivant la démarche de la partie 1.2

ii. Pour ces données, le coefficient de corrélation linéaire vaut 0.9995. Qu'en déduire ? ☺

1.4. Analyse de l'équation de Michaelis-Menten par Schnelle et Mendoza

Les parties précédentes ont permis de déterminer expérimentalement les constantes K_M et v_{max}. Dans cette partie, on s'intéresse à la dépendance de s par rapport au temps, sous l'hypothèse de l'Approximation des Etats Quasi Stationnaires (AEQS) selon laquelle la variation de la concentration en complexe « enzyme-substrat » est nulle (car il est consommé par la réaction juste après sa création), à l'exception d'une très courte phase initiale de durée $\delta > 0$. On considère que la concentration en S ne varie pas au cours de cette phase initiale.

Sous cette hypothèse, pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, on a $\dfrac{ds}{dt}(t) = -\dfrac{dp}{dt}(t) = -\dfrac{v_{max} \times s(t)}{K_M + s(t)}$.
On s'intéresse désormais à l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_{max} \times s}{K_M + s} \qquad [E_1]$$

avec pour condition initiale $s(\delta) = s_0$.

① **Méthode d'Euler :** On rappelle que pour tout fonction f dérivable sur un intervalle I, on approche $f'(t)$ par $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ pour h suffisamment petit.
En déduire pour toute solution s de $[E_1]$ une expression de $s(t+h)$ en fonction de $s(t)$, ou $t \in [\delta, +\infty[$ et écrire une fonction Python `resolutionE(Vmax, Km, tf, s0, h)` permettant, une fois appelée, de tracer une approximation numérique de la solution de $[E_1]$ sur l'intervalle $[\delta, t_f]$

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x$.

a) Démontrer que g est strictement croissante. ☺

b) En déduire que la fonction h, réciproque de g, est bien définie et donner son domaine de définition. ☺

c) Tracer la courbe représentative de la fonction h en expliquant la méthode graphique utilisée. ☺

③ On définit $y(t) = g\left(\dfrac{s(t)}{K_M}\right)$. Écrire une équation différentielle du premier ordre satisfaite par la fonction y et donner la condition initiale correspondante.

④ Déduire des questions précédentes une expression de $y(t)$ puis de $s(t)$ en fonction de t, K_M, v_{max} et s_0 (et faisant appel à la fonction h).

⑤ Proposer une méthode numérique permettant d'approcher les valeurs de la fonction h.