5 Espaces vectoriels

Les objectifs : « Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ($\mathbb{K}^n$) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non (on travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Les capacités exigibles sont les suivantes : Trouver une base et la dimension d'un espace vectoriel ; calculer le rang d'une famille finie de vecteurs ; capacité d'abstraction (ou d'adaptation) pour concevoir une fonction, un polynôme ou une matrice comme un vecteur. »

1 Structure vectorielle.

1.1 Définition et exemples

Définition *Espace vectoriel*

On appelle `espace vectoriel` *sur $\mathbb{K}$ ou K-espace vectoriel tout ensemble E non vide muni :*

① *D'une addition interne satisfaisant :*

$$\begin{array}{lr}\forall (u,v)\in E^2,\ u+v\in E & \textit{(Stabilité)}\\ \forall (u,v)\in E^2,\ u+v=v+u & \textit{(Commutativité)}\\ \forall (u,v,w)\in E^3,\ u+(v+w)=(u+v)+w & \textit{(Associativité)}\\ \exists 0_E\in E/\forall u\in E, u+0_E=u & \textit{(Elément neutre)}\\ \forall u\in E, \exists u'\in E/u+u'=0_E & \textit{(E symétrisable)}\end{array}$$

② *D'une multiplication externe satisfaisant :*

$$\begin{array}{lr}\forall u\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda u\in E & \textit{(Stabilité)}\\ \forall (u,v)\in E^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ : & \\ (\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u & \textit{(Distributivité)}\\ \lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v & \textit{(Distributivité)}\\ \lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u & \textit{(Associativité)}\\ 1\cdot u=u & \textit{(Produit par l'élément neutre)}\end{array}$$

Notations : Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ **scalaire**. 0_E désigne le vecteur nul.

Définition *combinaison linéaire*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On appelle `combinaison linéaire` *des vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ de $\mathcal{F}$ tout vecteur v de la forme :*

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \text{ où } (\lambda_1, \cdot, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Remarque 1.1 :

- Le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs de E.
- Si u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors quelque soit un vecteur $w \in E$, u est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \cdots, u_n, w$.

Exemples

Exemple fondamentaux

① $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ; En particulier* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels,* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{C}^2$ *sont des* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels* **et** *des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels.*

② $\mathbb{K}^I$ *: Ensemble des applications définies sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

③ $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ *: Ensemble des fonctions de classes* $\mathcal{C}^n$ *définies sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

④ $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.

⑤ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *: matrices* n *lignes,* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Propriété

Règles de calcul

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* u *et* v *deux vecteurs de* E *et* λ *un scalaire de* $\mathbb{K}$*. Alors :*

(i) $0 \cdot u = 0_E$ *(ii)* $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ *(iii)* $(-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u)$

(iv) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$ *(v)* $\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Sous-espaces vectoriels

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle* `sous-espace vectoriel` *de* E *toute partie non vide de* E*, à la fois stable par l'addition de* E *et stable par la multiplication par un scalaire.*

Caractérisation des sous-espaces vectoriels :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E si :

(i) $F \subset E$ (ii) $0_E \in F$ (iii) $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u + v \in F$

Propriété

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

① *Si* F *est un sous-espace vectoriel, alors* F *muni des mêmes lois que* E *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

② E *et* 0_E *sont deux sous-espaces vectoriels de* E

Propriété

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
Si F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E*, alors* $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E

Remarque 1.2 : Il est possible d'étendre ce résultat à l'intersection finie de n sous-espaces vectoriels de E.
Remarque 1.3 : L'union de sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé `sous-espace vectoriel engendré par` $\mathcal{F}$.
On le note $Vect\{\mathcal{F}\}$ *ou encore* $Vect\{u_1, \cdots, u_n\}$

Remarque 1.4 : On dit aussi que X est une *famille génératrice* de $\text{Vect}\{\mathcal{F}\}$ et on écrit :

$$\text{Vect}\{\mathcal{F}\} = \{\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Exemples

Exemple classiques

Dire dans chaque cas si les ensembles F sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E suivants :

- $E = \mathbb{R}^n$: $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$; $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y\}$;
  $F_3 = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u = (\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta)\}$
- $E = \mathbb{R}[X]$: $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P'(X) = P(X)\}$; $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(1) = 1\}$; $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(1) = 0\}$;
- $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$: $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - af(x) = 0\}$; $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' - 3f' + 2f = 0\}$;
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $F_9 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$; $F_{10} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M$ *inversible*$\}$;
  $$F_{11} = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$$

2 Familles generatrices et libres. Bases

Définition

famille generatrice finie d'un espace vectoriel

Soit E une $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. Sous réserve d'existence, $\mathcal{F}$ est dite `famille génératrice de` F *si $F = Vect\{\mathcal{F}\}$. Autrement dit :*

$$\forall u \in F, \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Remarque 2.1 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}'$ est aussi une famille génératrice de F.

Définition

famille libre finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est `libre` *si :*

$$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_k = 0, \forall k \in [\![1, n]\!]$$

Les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont dits dans ce cas `linéairement indépendants`.

Définition *famille liée*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{F}=\{u_1,\cdots,u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est `liée` *si elle n'est pas libre, autrement dit :*

$$\exists(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\cdots,0)\}/\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0$$

Exemple *Exemple fondamental de famille libre*

Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre

Propriété

① *Toute sous famille d'une famille libre est libre.*

② *$\{u,v\}\subset E^*$. u et v sont colinéaires si, et seulement si, $\{u,v\}$ est liée.*

③ *Si $0_E\in\mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est liée.*

④ *Si $\mathcal{F}$ contient deux fois le même vecteur alors cette famille est liée.*

Définition *Base finie d'un espace vectoriel*

Sous réserve d'existence, on appelle `base` *d'un espace vectoriel E toute famille de E à la fois libre et génératrice.*

Exemples

① $\mathcal{B}_1=((1,-2,0),(0,3,1),(1,2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

② $\mathcal{B}_2=((X-1)^2,X(X-1)^2)$ est une base de $F_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/P(1)=0=P'(1)\}$

③ $\mathcal{B}_3=(1,X-2,(X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

④ $\mathcal{B}_4=(x\longmapsto e^x,x\longmapsto e^{2x})$ est une base de $F_4=\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})/f''-3f'+2f=0\}$

⑤ Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, déterminer une base de $\mathcal{B}=\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})/f''+af'+bf=0\}$ selon le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$.

Théorèmes *Coordonnées d'un vecteur dans une base*

Si $\mathcal{B}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ est une base de E alors tout vecteur u de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Les coefficients de cette décomposition sont appelés les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$

Exemples

En reprenant les bases obtenues dans l'exemple ci-dessus, déterminer les coordonnées les coordonnées de $u = (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ et les coordonnées de $P = 1 + X - X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}_3$.

Notation

Si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n alors si $u = (a_1, \cdots a_n)_{\mathcal{B}}$ alors la `la matrice des coordonnées` *de u dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice colonne et on note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$*

Remarque 2.2 Par extension, si $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ est une famille finie de p vecteurs de E exprimée dans cette base avec

$$u_k = (a_{1,k}, \cdots, a_{n,k}),\ \forall k \in [\![1, p]\!]$$

alors on appelle $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la `matrice des coordonnées de la famille` $\mathcal{F}$ `dans la base` $\mathcal{B}$ avec

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

⚠ Les bases canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont respectivement :

$\mathcal{B}_1 =$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{B}_2 =$

3 Dimension.

Définition *espace vectoriel de dimension finie*

On dit que l'espace vectoriel E est`de dimension finie` *si E admet une famille génératrice finie ou encore s'il existe une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E telle que $E = Vect\{\mathcal{F}\}$.*

Remarque 3.1 : De toute famille génératrice finie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base.

Théorèmes *dimension d'un espace vectoriel*

Dans un espace vectoriel E non réduit au vecteur nul et de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal ; ce nombre est appelé `dimension` *de E.*

Remarque 3.2 Par convention, $\dim(E) = 0 \Leftrightarrow E = \{0_E\}$.

Théorèmes

Dans un espace vectoriel de dimension n :

- *Toute famille libre a au plus n éléments.*
- **Une famille libre ayant n éléments est une base.**
- *Toute famille génératrice a au moins n éléments.*
- **Une famille génératrice ayant n éléments est une base.**

Théorèmes

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.

Définition *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle `rang de` *$\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$, soit $rg(\mathcal{F}) = \dim(Vect\{\mathcal{F}\})$. C'est donc aussi le plus grand nombre de vecteurs issus de $\mathcal{F}$ formant une famille libre.*

Remarque 3.3 : Le rang d'une famille de vecteurs peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Remarque 3.4 : Une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, son rang est égale à son cardinal.