6 Nombres complexes et polynômes.

Rappels (BCPST1 - Trigonométrie et nombres complexes)

- ***Nombres complexes :*** Écriture algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Représentation géométrique. Propriétés des conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe.
  Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$.
  Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des solutions.
  Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.
- ***trigonométrie :*** Définition, périodicité et symétrie des fonctions cos, sin et tan.
  Formules de trigonométrie $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
  Résolution d'équations trigonométrique du type : $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$ et $\tan(x) = t$.
  Notations arccos, arcsin et arctan.
  Transformation : $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = R\cos(\theta + \phi)$.

1 Nombres complexes

Exercice 1 ✶ : Linéariser les expressions suivantes

$$A_1 = \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta),\ A_2 = \cos^2(\theta) \cdot \sin^4(\theta)$$

Exercice 2 ✶ : Formules trigonométriques usuelles

Utiliser les formules de trigonométries usuelles ($\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(2a)$, etc.) pour démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$$

Exercice 3 : formules usuelles

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

① Exprimer $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

② Calculer $\dfrac{1}{\tan(\theta)} - \dfrac{2}{\tan(2\theta)}$ en précisant l'ensemble de validité.

③ En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k)$.

Exercice 4 ✶ : Formes algébriques et trigonométriques

Soit $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de a, b et ab.
En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 5 ✶✶ : Étude de conjugaison et de module

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = 1 = |z_2|$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 ✶ : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

① $z^2 - 2z + 2 = 0$ et $z^2 - z + 1 = 0$

② $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$. ✐ On montrera qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.

③ Si l'équation $2z^2 - (7 - 2i)z + k = 0$ admet $1 + i$ comme solution, déterminer la deuxième solution de l'équation et k.

④ $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$

Exercice 7 ✶ : Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$

Résoudre de deux manières distinctes l'équation $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$

Exercice 8 ✶ :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

① 0 appartient-il à $\mathbb{U}$? Donner au moins quatre éléments de l'ensemble $\mathbb{U}$.

② Montrer que le produit et le quotient de deux éléments de $\mathbb{U}$ appartient à $\mathbb{U}$.

③ La somme de deux éléments de $\mathbb{U}$ est-elle dans $\mathbb{U}$?

④ Montrer que si $z \in \mathbb{U}$ alors $z + \dfrac{1}{z}$ est un réel compris entre -2 et 2.

Exercice 9 ✶✶ :

On pose $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

① Que vaut z^7 ? En déduire que S et T sont des nombres complexes conjugués.

② Calculer $S + T$ et $S \cdot T$.

③ Montrer que S et T sont racines d'un trinôme qu'on déterminera. En déduire les valeurs de S et de T après avoir déterminer le signe de la partie imaginaire de S.

2 Polynômes

Exercice 1 ✶ : Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

$$P(X) = X^3 - 8,\ Q(X) = X^6 - 3X^2 - 2,\ R(X) = X^4 + X^2 + 1 \text{ et } S(X) = (2X+1)^4 - (X-1)^4$$

Exercice 2 ✶ : Racines et degré d'un polynôme

Soient deux réels a et b tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme :

$$P_{2n+1}(X) = (X + a + b)^{2n+1} - X^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$$

① Quel est le degré de P_{2n+1} ?

② Montrer que P_{2n+1} est divisible par P_3, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{2n+1} = P_3 \cdot Q$.

Exercice 3 ✶ : racines et coefficients d'un polynôme

On cherche à déterminer tous les triplets de nombres complexes (z_1, z_2, z_3) de même module 1 tels que : $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ et $z_1 z_2 z_3 = 1$.

① Soit $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Exprimer les coefficients de P en fonction de ses racines dans $\mathbb{C}$.

② De quel polynôme z_1, z_2 et z_3 sont les racines ?

③ Conclure. Dire notamment quel est le nombre de solutions.

Exercice 4ding86 : Ordre de multiplicité

① Soit $P(X) = 2X^{35} + \sqrt{2}X - 3$. Montrer que P n'a qu'une racine réelle et que celle-ci est simple et positive.

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$. Montrer que P_n n'a aucune racine multiple.
✐ On pourra montrer que toute racine multiple de P_n est racine de $P_n' - P_n$.

Exercice 5 ✶✶ :

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

① Calculer P_2, P_3 et P_4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

② Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, le réel :

$$\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$$

est racine de P_n. Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 ✶✶ :

Soit $n \in \mathbb{N}$. A tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on associe le polynôme :

$$Q_P(X) = (3X+8)P(X) + (X^2-5X)P'(X) - (X^3-X^2)P''(X)$$

① Comparer, lorsque P est non nul, le degré de P et celui de Q_P.

② Que vaut P lorsque Q_P est le polynôme nul ?

Planche 7 : oral Agro 2018

Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2-1)P'$.

① On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnée par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par `[0,1,0,2,1]`.

- **a.** Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme dérivé P'.
- **b.** Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme XP.
- **c.** En déduire une fonction retournant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P.

② On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.

③ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n. Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n+1$.
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?

④ On considère l'équation (E) : $\Phi(P) = 9P$.

- **a.** Le polynôme nul est-il solution ?
- **b.** On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solution de (E).
  Montrer que ceux-ci sont de degré 9.
  Montrer qu'ils sont solution d'une équation différentielle du premier ordre et en déduire qu'on peut les mettre sous la forme : $\lambda(X+1)^9$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.