TD04 - Exercice 9

U : 1 B, 2 R

V : 1 B, 3 R

Étape 1 : $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall k\in\mathbb{N}^*$.

Étape 2 : Si $(X=k)$ est réalisé, alors on effectue k tirages avec remise dans U puis des tirages dans V. Y est alors le rang de la première blanche.

1) On commence par modéliser une loi uniforme de paramètre $p=1/2$ puis on modélise X tirages dans U, suivis (si besoin) de tirages dans V jusqu'à obtenir la première blanche.

Une rédaction possible est la suivante :

```
def simulGeom(p):
    x = 1
    while rdm.random() > p:
        x += 1
    return x

def simulY()
    X = simulGeom(1/2)
    Y = 1
    while Y <= X and rdm.random() > 1/3 :
        Y += 1
    if Y <= X:
        return Y  # une blanche dans U.
    else :
        return Y + simulGeom(1/4)
        # on a poursuivi dans l'urne V
```

2) $(n,s)\in(\mathbb{N}^*)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} q\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \\ n & \text{si } q=1 \end{cases}$$

- Si $|q|\geq 1$ alors $\sum_{k\geq s} q^k$ diverge.
- Si $|q|<1$, alors $\sum_{k\geq s} q^k$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=s}^{\infty} q^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{s-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^s}{1-q} = \boxed{\frac{q^s}{1-q}}$$

3) a) Question de cours $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) : E(X)=2\ ;\ V(X)=\frac{1/2}{(1/2)^2}=2}$

[Sera repris en février...
Pour l'instant, montrer que : $P(X=k)=(1/2)^k\ \forall k\in\mathbb{N}$, $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)=2$ et $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = 6$]

b) $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X\geq \ell) = P(X>\ell-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}}$

Par le calcul ou en disant que $(X>\ell-1)$ est réalisé si, et seulement si, la pièce a amené que des Pile au cours des $(\ell-1)$ premiers lancers (indépendants).

4) Si $(Y=1)$ est réalisé, le tirage de la boule blanche a eu lieu dans l'urne U.

$$P(Y=1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y=1, X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{(X=i)}(Y=1)\cdot P(X=i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot P(X=i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = P(Y=2, X\geq 2) + P(Y=2, X<2)$$ [FPT avec $\{(X\geq 2), (X<2)\}$ SCE]
$$= P(X\geq 2, Y=2) + P(X=1, Y=2)$$
$$= P(X\geq 2)\, P_{(X\geq 2)}(Y=2) + P(X=1)\cdot P_{(X=1)}(Y=2)$$

D'après 3) b)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 P_U(Y=2) + \frac{1}{2} P[R_U^1 \cap B_V^2]$$

Év^{ts} indépendants

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$$ [conforté par 5) qui

Remarque : Résultat conforté par la question 5) qui demande de montrer que :

$$P(Y=2) = \frac{1}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{20} + \frac{2}{45} = \frac{27+8}{180} = \frac{35}{180}$$
$$= \frac{7}{36}\ \ldots$$

Conclusion $\boxed{P(Y=1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(Y=2) = \frac{7}{36}}$

5) Plus généralement, avec le système complet d'événements, $\{(X\geq \ell), (X<\ell)\}$ $(\ell\in\mathbb{N}^*)$, on obtient d'après la F.P.T :

$$P(Y=\ell) = P(Y=\ell, X\geq \ell) + P(Y=\ell, X<\ell)$$
$$= P_{(X\geq \ell)}(Y=\ell)\cdot P(X\geq \ell) + P(Y=\ell, X<\ell)$$

avec

$$P_{(X\geq \ell)}(Y=\ell) = P_U(Y=\ell) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\cdot\frac{1}{3} \text{ et } P(X\geq \ell) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}$$ (cf. 3) b))

Par ailleurs :

$$P(Y=\ell, X<\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-1} P(Y=\ell, X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} P_{(X=i)}(Y=\ell).P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} P\left[R_V^1 \cap R_V^2 \cap \ldots \cap R_V^i \cap R_J^{i+1} \cap \ldots \cap R_J^{\ell-1} \cap B_J^\ell\right].P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell-1} \left[\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1-i} \frac{1}{4}\right].\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^i$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{4}{3}\right)^i$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} \frac{\cancel{4}}{9} \, \frac{1-(4/9)^{\ell-1}}{1-4/9} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{\ell-1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}$$

D'où, $\forall \ell \geq 1$:

$$P(Y=\ell) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} + \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\right]$$

$$P(Y=\ell) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\left[\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}_{=\frac{2}{15}}\right]$$

$$\boxed{P(Y=\ell) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-1} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}}$$

6) On pourra se contenter d'écrire :

```
>>> sum([formulY() for _ in range(10000)])/10000
```

7) $\sum_{\ell \geq 1} \ell (3/4)^{\ell-1}$ CV car $0 < 3/4 < 1$ de somme $S_1 = \frac{1}{(1-3/4)^2} = 16$

$\sum_{\ell \geq 1} \ell (1/3)^{\ell}$ CV car $0 < 1/3 < 1$ de somme $S_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{3}{4}$

D'où $\underbrace{E(Y) \text{ existe}}_{\text{C.L. de séries convergente}}$ et $E(Y) = \frac{1}{5} S_1 + \frac{2}{5} S_2 = \frac{16}{5} + \frac{3}{10} = \boxed{\frac{35}{10}}$

[Confirmé par 6...]