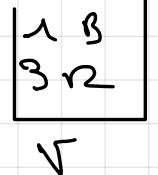
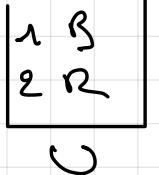


TDD4 - Exercice 9



Etape 1 : $X(L2) = N^*$, $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \forall k \in N^*$

Etape 2 : Si $(X=k)$ est réalisé, alors on effectue k tirages avec remise dans U puis des tireages dans V et on ajoute le rang de la première bleue.

- On commence par modéliser une loi uniforme de paramètre $p = 1/2$ puis on modélise X tirages dans U , suivis (ou bien) de tireages dans V jusqu'à obtenir la première bleue.

Une réalisation possible est la suivante :

```

def simulGeom(p):
    x = 1
    while random() > p:
        x += 1
    return x

def simulY():
    X = simulGeom(1/2)
    Y = 1
    while Y <= X and random() > 1/3:
        Y += 1
    if Y <= X:
        return Y # une bleue dans U.
    else:
        return Y + simulGeom(1/4)
        # on a poursuivi dans l'urne V
    
```

- $(n, p) \in (N^*)^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \begin{cases} q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

- Si $|q| \geq 1$ alors $\sum_{k \geq 1} q^k$ diverge.

- Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k \geq 1} q^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}$$

③ a) Question de cours

$X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$: $E(X)=2$; $V(X)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2$

[Sera repris au final...]
Pour l'instant montrons que: $P(X=k) = \binom{1}{2}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = 2$ et $E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) = 6$

b) $l \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq l) = P(X > l-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}$

Par le calcul ou en disant que $(X > l-1)$ est réalisé si, et seulement si, la pièce a tomber que des piles au cours des $(l-1)$ premiers lancers (indépendants).

(4) Si $(Y=1)$ est réalisé, le tirage de la balle blanche a lieu dans l'urne U .

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(Y=1, X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y=1) \cdot P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot P(X=i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P(Y=2, X \geq 2) + P(Y=2, X < 2) \quad [\text{F.P.T avec } \{(X \geq 2) \cup (X < 2)\} \text{ S.C.E}] \\ &= P(X \geq 2, Y=2) + P(X=1, Y=2) \\ \text{d'après } ③ \text{ b)} &= P(X \geq 2) P_{(X \geq 2)}(Y=2) + P(X=1) P_{(X=1)}(Y=2) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 P_U(Y=2) + \frac{1}{2} P[R_U^1 \cap R_V^2] \quad \text{en t-} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) \quad \text{indépendants} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4+3}{36} = \frac{7}{36} \quad [\text{confirme par } ④ \text{ qui }] \end{aligned}$$

Remarque: Résultat confirmé par la question ⑤ qui demande de montrer que:

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{20} + \frac{2}{45} = \frac{9+8}{180} = \frac{35}{180} \\ &= \frac{7}{36} \dots \end{aligned}$$

Conclusion

$$P(Y=1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(Y=2) = \frac{7}{36}$$

⑤ Plus généralement, avec le système complet d'évenements, $\{(X \geq l), (X < l)\}$ ($l \in \mathbb{N}^*$), on obtient d'après la F.P.T.:

$$\begin{aligned} P(Y=l) &= P(Y=l, X \geq l) + P(Y=l, X < l) \\ &= P_{(X \geq l)}(Y=l) \cdot P_{(Y \geq l)} + P_{(Y=l, X < l)} \end{aligned}$$

avec

$$P_{(X \geq l)}(Y=l) = P_U(Y=l) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} \cdot \frac{1}{3} \text{ et } P_{(Y \geq l)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \quad [\text{cf. } ③ \text{ b})]$$

Pour suivre :

$$\begin{aligned}
 P(Y=l, X < l) &= \sum_{i=1}^{l-1} P(Y=l, X=i) \\
 &= \sum_{i=1}^{l-1} P_{(X=i)}(Y=l) \cdot P(X=i) \\
 &= \sum_{i=1}^{l-1} P\left[R_0^1 \cap R_1^2 \cap \dots \cap R_i^i \cap R_{i+1}^i \cap \dots \cap R_{l-1}^{l-1} \cap B_l^l\right] \cdot P(X=i) \\
 &= \sum_{i=1}^{l-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1-i} \frac{1}{4} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{4}{3}\right)^i \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} \frac{4}{9} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{l-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{l-1}\right] \\
 &= \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}
 \end{aligned}$$

D'où, si $l \geq 1$:

$$P(Y=l) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} + \left[\frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} \right]$$

$$P(Y=l) = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]$$

$$P(Y=l) = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}$$

$$\underbrace{\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]}_{= \frac{2}{15}}$$

⑥ On pourra se contenter d'écrire :

»»» sum(rnorm(4)) for - in range(10000)) / 10000

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \sum_{l \geq 1} l \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} &\text{ CV car } 0 < \frac{3}{4} < 1 \text{ do somme } S_1 = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \\
 \sum_{l \geq 1} l \left(\frac{1}{3}\right)^l &\text{ CV car } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{ do somme } S_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } E(Y) &\text{ existe et } E(Y) = \frac{1}{5} S_1 + \frac{2}{5} S_2 = \frac{1}{5} \cdot 4 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{35}{10} = \boxed{\frac{35}{10}}
 \end{aligned}$$

C.L. de séries convergente

[Confirme par ⑦...]