3 Polynômes.

Rappels du programme de BCPST1

① **Polynômes, règles de calculs.**

- Un polynôme P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, où $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
- Définitions de *monômes*, *coefficients*, *polynôme nul*.
- Connaître les cas particuliers : polynômes constants, fonctions affines, fonctions puissances entières.
- Les opérations usuelles (combinaisons linéaires, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.
- Unicité de l'écriture des polynômes : un polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est nul si, et seulement si, touts ses coefficients sont nuls.
- coefficients dominant, degré d'un polynôme.
- Polynôme dérivé. Degré du polynôme dérivé.

② **Racines et factorisations.**

- Racines réelles d'un polynôme : un nombre réel α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Généralisation à plusieurs racines distinctes.
- Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
- Un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.
- Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant n racines distinctes s'écrit sous la forme $P : x \longmapsto a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$.

③ **Racines multiples.**

- Ordre de multiplicité.
- Une racine α d'un polynôme P est une racine multiple si, et seulement si, $P'(\alpha) = 0$.

1 Polynômes, règles de calcul.

✐ *Remarque :* Sauf mention contraire, dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

On désigne par X l'application qui à tout x dans $\mathbb{K}$ associe x.

Définition

Définition 1.1.

On appelle monôme à coefficient dans $\mathbb{K}$ *l'application* $\mathbb{K} \longmapsto \mathbb{K}$ *telle qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et* $a_p \in \mathbb{K}^*$ *définie par :*

$$x \longmapsto a_p x^p$$

On la note $a_p X^p$.

Définition

Définition 1.2.

Soit $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On appelle polynôme d'indéterminée* X, *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *toute application*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n$$

où les $a_k \in \mathbb{K}$, *pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$ *sont appelés les coefficients du polynôme* P.
si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *on parlera de polynôme à coefficient dans* $\mathbb{R}$, *sinon on parlera de polynôme à coefficient dans* $\mathbb{C}$.

Remarque

Remarque 1.1

On notera aussi bien P *que* $P(X)$ *pour désigner le polynôme* P. *Aussi on prendra soin de ne pas confondre ces deux notations avec* $P(x)$ *qui est égale à l'image de* x *par* P *et qui est un élément de* $\mathbb{K}$.

Remarque

Remarque 1.2

Le polynôme nul coïncide avec l'application nulle sur $\mathbb{K}$ *et à ce titre, tous ses coefficients sont nuls.*

Propriété

Proposition 1.1. Structure d'espace vectoriel

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *Alors, pour tous* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

- $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$ *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
- $P + Q = \sum_{k=0}^{max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$ *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Plus généralement :

$$\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^{max(p,q)} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriété

Proposition 1.2. Produit de deux polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *Alors :*

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \text{ où } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

C'est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriété

Proposition 1.3. Composition de deux polynômes

Étant donnés $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* Q, *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *Alors :*

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Remarque

Remarque 1.4

- *Dans le cas particulier* $Q = X$, *le polynôme* $P(Q) = P(X)$ *est égale à* P.
  C'est pourquoi on utilise aussi bien P *que* $P(X)$ *pour désigner ce polynôme.*
- *Si* $P = 0$, *alors* $P \circ Q = 0$ *et si* $(P \neq 0$ *et* $Q = 0)$, *alors* $P \circ Q = P(0)$.

Propriété

Proposition 1.4. Unicité de l'écriture des polynômes

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux.

Remarque

Remarque 1.5

Cette proposition permet d'assurer que les coefficients d'un polynôme caractérisent ce polynôme.
Ceci fournit une nouvelle notation des polynômes :

- $X^0 = (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$
- $X^1 = (0, 1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$
- $X^k = (0, 0, 0, 0, \cdots, 1, \cdots)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

et plus généralement :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, 0, \cdots)$$

2 Degré d'un polynôme.

Remarque

Remarque 2.1

Lorsqu'un polynôme P n'est pas nul, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}/a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée. Elle admet un plus grand élément.

Définition

Définition 2.1.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit le degré de P par :

$$\begin{cases} max\{k \in \mathbb{N}/a_k \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$$

On le note $\deg(P)$ ou $degP$.

Remarque

Remarque 2.2

- *Un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré inférieur ou égal à n. Il est de degré n si, et seulement si, $a_n \neq 0$. Dans ce cas le coefficient a_n s'appelle le* coefficient dominant *du polynôme.*
- *Un polynôme (non nul) dont le coefficient dominant est égal à 1 est appelé «* polynôme unitaire *» ou «* normalisé *».*

Propriété

Proposition 2.1. opérations élémentaires et degré

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

- $\deg(P+Q) \leq max(\deg(P), \deg(Q))$*, avec égalité si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- *Si P et Q sont non nuls,* $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Notation

On note :

- $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.*
- $\mathbb{R}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Soit :*

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$$

Notation

On note :

- $\mathbb{C}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *de degré inférieur ou égal à* n. *Soit :*

$$\mathbb{C}_n[X] = \{P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) \leq n\}$$

On rappelle que le degré du polynôme nul est donné par $\deg(0) = -\infty$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ contient le polynôme nul.
$\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynôme de degré au plus égal à 0... Il s'agit donc de l'ensemble des polynômes constants.

Remarque *Remarque 2.3*

- *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$, *alors :*

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

- *Si* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *et* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, *alors :*

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq max(\deg(P), \deg(Q))$$

3 Racines et factorisation.

Remarque *Remarque 3.1*

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ *:*

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

En pratique, on acceptera de dire qu'on « substitue » α *à* X *ou qu'on « remplace »* X *par* α.

Définition *Définition 3.1.*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Un élément α *de* $\mathbb{K}$ *est racine de* P *si* $P(\alpha) = 0$.

Propriété

Proposition 3.1.

Un nombre réel ou complexe α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Propriété

Proposition 3.2.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de P, alors il existe un polynôme Q_p tel que $P = Q_p \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$.

Propriété

Proposition 3.3.

Un polynôme **non nul** *de degré n admet au plus n racines distinctes.*

Remarque

Remarque 3.1

On utilise souvent cette propriété pour montrer qu'un polynôme est nul :

- *soit en exhibant $n + 1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leq n$.*
- *Soit en exhibant une infinité de racines.*

Exemple

① *Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*

$$P(\cos(x)) = \cos(nx),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors ce polynôme est unique.

② *La fonction exponentielle complexe n'est pas polynômiale.*

Remarque

Remarque 3.2

Si P est de degré n et admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$$

où λ est le coefficient dominant de P.

Définition

Définition 3.2.

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et un entier naturel p non nul. On dit que α est :

- **racine d'ordre au moins** *p de P si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^p Q$.*
- **racine d'ordre** *p de P si α est racine d'ordre au moins p mais pas d'ordre $p+1$. L'entier p est appelé ordre de multiplicité de la racine α.*
- **racine multiple** *de P si α est racine d'ordre au moins 2.*

Remarque

Remarque 3.3

Soit P un polynôme non nul de degré n. Si α est racine de P alors son ordre de multiplicité est un entier inférieur ou égal à n.

Propriété

Proposition 3.4.

Soient α une racine d'ordre au moins p d'un polynôme non nul P, et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^p Q$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } p \text{ de } P \text{ si, et seulement si, } Q(\alpha) \neq 0$$

Propriété

Proposition 3.5.

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont r racines distinctes de P d'ordre respectivement égale à $p_1, p_2, \cdots, p_r$. Alors

$$\exists Q \in \mathbb{K}[k] \text{ tel que } P = Q \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{p_i}$$

Remarque

Remarque 3.4

Lorsqu'on demande de dénombrer les racines d'un polynôme, on peut :

- *Soit compter le nombre de racines distinctes.*
- *soit compter chaque racine autant de fois que son ordre de multiplicité.*

Par exemple $P = 3(X+1)(X-1)^2(X-2)^3$ admet racines distinctes et racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Propriété

Proposition 3.6. - théorème de d'Alembert

Tout polynôme **non constant** *de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Remarque

Remarque 3.5

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont r racines distinctes de P d'ordre respectivement égale à $p_1, p_2, \cdots, p_r$ et $\deg(P) = \sum_{i=1}^{r} p_i$. Alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{p_i}$$

Propriété

Proposition 3.7 - factorisation dans l'ensemble des complexes

Tout polynôme **non nul** *de $\mathbb{C}[X]$ est « scindé » sur $\mathbb{C}$. Autrement dit :*

$$\exists \lambda, \alpha_1 \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ (non nécessairement distincts) tels que } P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Remarque

Remarque 3.6

Ce résultat est évidemment faux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque, par exemple, $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Cependant, tout polynôme à coefficients réels est aussi un polynôme à coefficients complexes et par suite est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple

Les fonctions symétriques élémentaires des racines d'un polynôme

- *Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $a_2 \neq 0$. Alors,*
  $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $P = a_2(X - x_1)(X - x_2)$.
  Dès lors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 & = +\dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

- *Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $a_3 \neq 0$. Alors,*
  $\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que : $P = a_3(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.
  Dès lors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = +\dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 & = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Propriété

Proposition 3.8 - Polynômes à coefficients réels

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si un complexe α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P (au même ordre de multiplicité).

Remarque

Remarque 3.7

On retiendra que, si α est une racine complexe de P, alors :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - (\alpha+\overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha} = X^2 - 2Re(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Propriété

Proposition 3.9 - Factorisation dans l'ensemble des réels

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul. Alors P peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{p_i} \prod_{i=1}^{s} (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{q_i}$$

où r et s sont deux entiers naturels, λ, α_i, β_i et γ_i sont des réels vérifiant $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ et les p_i et q_i sont des entiers naturels non nuls.