

3

Équations différentielles.

Objectif

Reprendre par la pratique le cours sur les équations différentielles de BCPST1 en insistant sur le lien avec l'informatique (méthode d'Euler) et apprendrons à traiter des équations différentielles autonomes du type $y'(t) = F(y(t))$ où F est une fonction continue sur un intervalle à valeurs réelles.

Le programme officiel précise : « Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée et on se limitera à quelques exemples issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique ».

1 L'algorithme d'Euler explicite.

1.1 Introduction

Voici des exemples d'équations différentielles du premier ordre, certains élémentaires, d'autres glanés dans les sujets du concours Agro-Vêto :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) = -3y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \begin{cases} (1+t)y'(t) + y(t) = 0, t \in]-1, +\infty[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = \ln(2) \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) - \frac{y(t)}{4} = \cos(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) = 2y(t) - y^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Toutes peuvent se mettre, selon les cas, sous la forme générale

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = F(y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}} (E_1) \text{ ou } \boxed{\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}} (E_2)$$

où $y_0 \in J$ représente la condition à l'origine et $F \in \mathcal{C}(J)$ pour (E_1) , $F \in \mathcal{C}(I \times J)$ pour (E_2) , est spécifique à chaque équation. On dira que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times J$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution** sur I de l'équation différentielle si y est dérivable sur I et $y'(t) = F(y(t))$ ou $y'(t) = F(t, y(t))$ selon les cas, avec $y(t_0) = y_0$.

On admettra que la solution au problème ainsi posé existe en tant que fonction définie sur I et qu'elle est unique. Des techniques au programme existent pour obtenir cette solution (cf cours de BCPST1) mais ce n'est pas toujours le cas (cf. l'ED n°6 ci-dessus). Commençons donc par mettre en place une méthode numérique qui nous permettra, quel que soit le cas de figure, d'approcher la solution des équations d'ordre 1.

1.2 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = F(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Puisque la solution cherchée est dérivable sur I , on a pour h « suffisamment » petit :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \cong y'(t) \text{ ou encore } y(t+h) \cong y(t) + h \cdot y'(t)$$

et sous cette condition, on peut écrire $\boxed{y(t+h) \cong y(t) + h \cdot F(y(t))}$ pour h suffisamment petit.

Supposons vouloir résoudre l'équation sur un intervalle $[t_0, t_f]$ avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$. Pour faire le lien avec ce qui précède, on commence par définir une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ en précisant son « pas », $h = (t_f - t_0)/n$ où n est le nombre de « segments » dont nous aurons besoin. On retiendra qu'ainsi $(t_k)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison h , soit :

$$t_k = t_0 + kh \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ avec } t_n = t_f$$

La méthode d'Euler consiste à calculer pas à pas des valeurs approchées de tous les réels $y(t_k)$ en approchant la courbe sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par sa tangente en t_k . Précisons cette phrase :

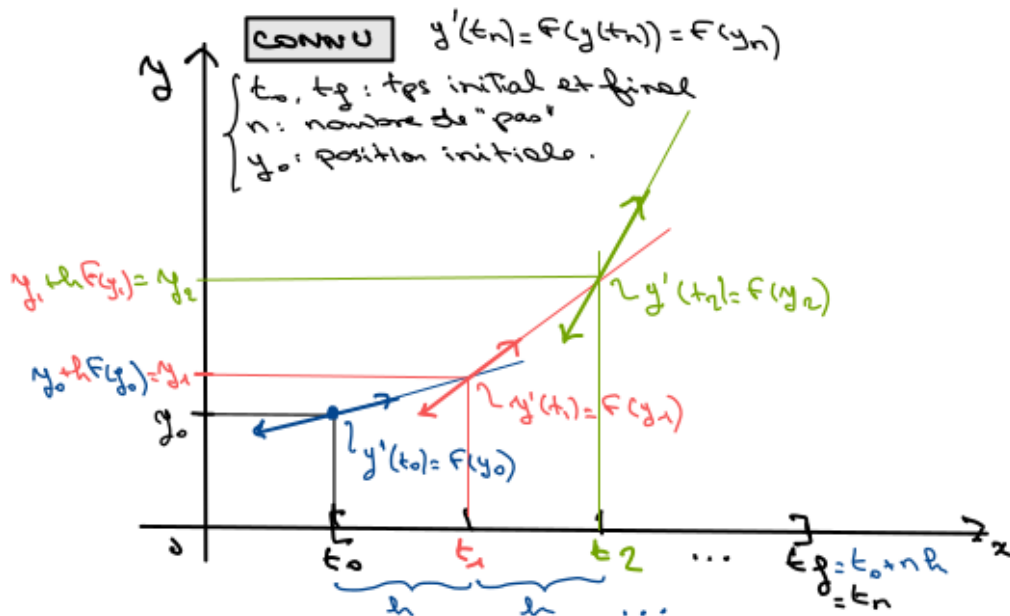
- En partant du point (t_0, y_0) , on suit la droite de pente $y'(t_0) = F(y_0)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. On a alors :

$$\begin{cases} t_1 &= t_0 + h \\ y_1 &= y_0 + h \cdot F(y_0) \end{cases}$$

- En partant du point (t_1, y_1) , on suit la droite de pente $y'(t_1) = F(y_1)$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. A cette étape, $t_2 = t_1 + h$, $y_2 = y_1 + hF(y_1)$.
- On construit ainsi une suite de points de façon récurrente en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}$$

La ligne brisée joignant les points $\{(t_k, y_k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ donne une solution approchée de l'ED.



Mise en oeuvre : Si $y' = F(y(t))$ où $y(t_0) = y_0$ admet une solution sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour avoir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, au pas de temps h , on commence par déterminer le nombre n de pas nécessaire pour la subdivision de $I_+ = [t_0, t_f]$, à savoir : $n = \frac{t_f - t_0}{h}$.

On construit la suite $(t_k, y_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par son premier terme (t_0, y_0) et vérifiant la relation :

$$\begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Algorithme d'Euler : Écrire une fonction `eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h)` permettant, connaissant la fonction F , le temps initial et final t_0 et t_f , la position à l'origine y_0 et le pas de temps h , de renvoyer à la fois la liste $T = [t_0, t_0+h, \dots, t_0+nh]$ et de la liste des valeurs estimées de y , à savoir $Y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$.

```

1 def eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h):
2     n = ... # nombre de pas
3     T = ...
4     Y = ... # initialise la solution approchée
5     T[0] = ...
6     Y[0] = ...
7     for k in range(.....):
8         T[k+1] = ...
9         Y[k+1] = ... # y'(t) = F[y(t)]
10    return T, Y

```

Application 1 : On considère cette fois l'équation différentielle (ED_2) : $y' = -3y$ et $y(0) = 2$.

- ① Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$. Tracer le graphe de sa solution et préciser sa limite en l'infini.
- ② On cherche une solution approchée grâce à la méthode d'Euler. Montrer qu'elle est donnée par une suite géométrique $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on précisera la raison et le premier terme. Dans quel intervalle doit se situer h pour assurer la stabilité de la solution, autrement dit pour que la solution numérique approchée conserve la même limite en l'infini que la solution y de (E_1) ?
- ③ Le vérifier en utilisant la fonction `eulerExplicite()` sur l'intervalle $I = [0, 2]$.

1.3 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

On généralise la méthode précédente en écrivant que pour obtenir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, on considère la suite (y_k) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(t_k, y_k) \end{cases}$$

Algorithme d'Euler (version 2) : Écrire une fonction `eulerExplicite2(F, t0, tf, y0, h)` qui renvoie sous forme de liste la subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ ainsi que la valeur estimée de la solution en chaque point de cette subdivision.

```

1 def eulerExplicite2(F, t0, tf, y0, h):
2     n = ... # nombre de pas
3     T = ...
4     Y = ... # initialise la solution approchée
5     T[0] = ...
6     Y[0] = ...
7     for k in range(.....):
8         T[k+1] = ...
9         Y[k+1] = ... # y'(t) = F[t, y(t)]
10    return T, Y

```

2 Les équations différentielles d'ordre 1. Rappel de cours

Méthode

méthode générale de résolution

- S'il n'est pas imposé, on détermine le domaine de définition de l'équation.
- On résout l'équation homogène ($\mathcal{H}$) (par l'une des méthodes ci-dessous)
- On trouve une solution particulière de ($\mathcal{E}$).
- On obtient la forme générale des solutions de ($\mathcal{E}$) en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de ($\mathcal{H}$).
- Dans le cas d'un problème de Cauchy, on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

Propriété

cas d'une équation homogène

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

avec a une fonction continue sur I .

Comme a est continue sur I , elle admet une primitive A .

Les solutions de ($\mathcal{E}_0$) sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = Ce^{-A(t)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

Soit $y' + ay = g(t)$ avec $a \neq 0$ (constante)

Expression de g	Forme de la solution particulière y_p
$g(x) = P(x)$ [Polynôme]	$y_p(x) = Q(x)$, $\deg(Q) = \deg(P)$
$g(x) = P(x)e^{mx}$	$y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, Q étant un polynôme
$g(x) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$	$y_p(x) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Méthode

Solution particulière dans le cas général (Variation de la constante)

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t)y = g(t) \quad (\mathcal{E})$$

avec a et g des fonctions continues sur I .

Comme a est continue sur I , elle admet une primitive A . Il existe une solution particulière de la forme :

$$\forall t \in I, y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

où $C : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I .

On injecte y_p dans l'ED, ce qui permet d'obtenir $C'(t)$ et donc $C(t)$ par une recherche de primitive. Une solution particulière en découle...

3.2.2 Le modèle logistique ou modèle de « Verhulst »

- ① **Introduction du modèle** : Le modèle exponentiel n'est pas satisfaisant puisque l'effectif de la population ne dépend en rien des ressources disponibles et plus généralement de la capacité d'accueil du milieu. L'idée est de faire dépendre le taux de croissance *per capita* de la population ($N'(t)/N(t)$) de l'effectif même de cette population. Si cette population est de faible effectif, alors elle adopte un comportement malthusien et le taux d'accroissement *per capita* est maximum tandis que, lorsque l'effectif augmente et ce rapproche de la capacité de charge de l'environnement, ce taux tend vers 0. L'idée la plus simple est d'imaginer une dépendance linéaire entre le taux de croissance *per capita* et l'effectif de la population, lui affectant la valeur 0 lorsque N atteint le potentiel d'accueil du milieu.

Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On considère maintenant le modèle suivant :

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, $y(0) = y_0$.

Définition

capacité biotique

Le terme $1 - \frac{N}{K}$ de ce modèle est interprété comme **la part de la capacité biotique encore disponible** et la fonction ρ définie par $\rho(N) = r(1 - \frac{N}{K})$ pondère le taux de croissance *per capita* par cette capacité biotique. La constante K , quant à elle, est appelée « capacité de charge » ou « potentiel d'accueil ». Dans notre exemple elle s'exprime en tonnes...

Propriété

$$\begin{cases} \rho(N) \geq 0 & \text{si } N \leq K \\ \rho(N) < 0 & \text{si } N > K \end{cases}$$

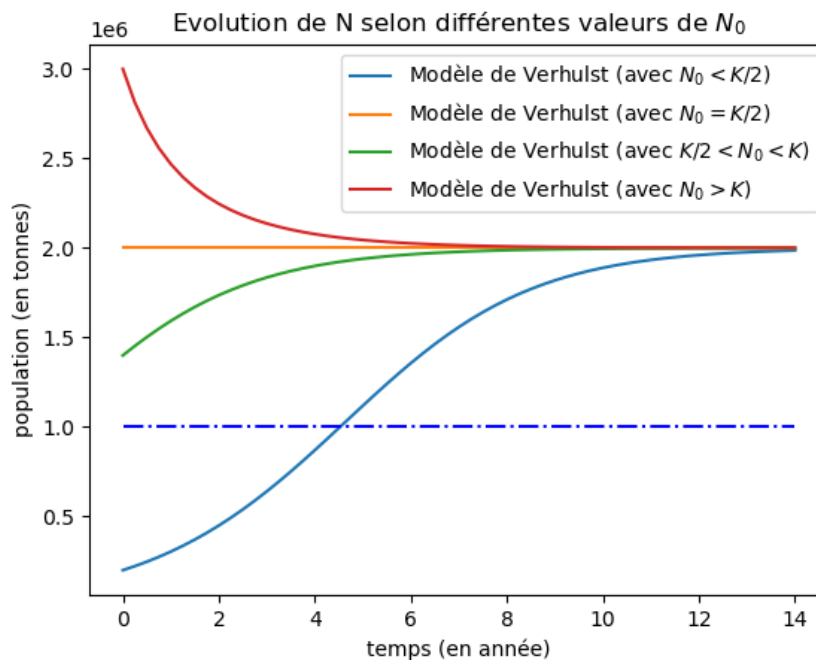
Activité

Utiliser le Notebook et la fonction Python `eulerExplicite2()` pour simuler grâce à la méthode d'Euler explicite ($h = 0.1$) quatorze années d'évolution de la population de poissons pour laquelle $r = 0.5 \text{ an}^{-1}$, $N_0 = 2 \cdot 10^5 T$ et $K = 2 \cdot 10^6 T$.

Donner la représentation graphique de l'évolution de population dans ce cas précis puis vers varier la taille de la population initiale en prenant successivement $N_0 = K$, $N_0 > K$, $N_0 < K/2$ et $K/2 < N_0 < K$.

Justifier ces évolutions.

Vous devriez obtenir les évolutions présentées sur la figure page suivante :



On dira que 0 et K sont les états **stationnaires** (ou encore **solutions constantes**) du modèle.

② Résolution analytique de l'équation logistique - A traiter sous forme d'exercice :

- Sachant que $N_0 > 0$ (sans quoi il n'y a pas de population à étudier...), justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [0, a], N(t) > 0$.
- Montrer que la fonction y définie sur $[0, a]$ par $y(t) = 1/N(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre qu'on résoudra.
- En déduire que la solution du modèle de Verhulst peut s'écrire (à vérifier graphiquement) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}$$

3.2.3 L'impact de prélèvements constants

Nous cherchons désormais à décrire l'impact de la pêche sur notre population de poissons. On imagine un modèle pour lequel le taux de prélèvement $P \in \mathbb{R}_+$ est constant au cours des années et ne dépend pas de l'état de la population. Le modèle devient le suivant :

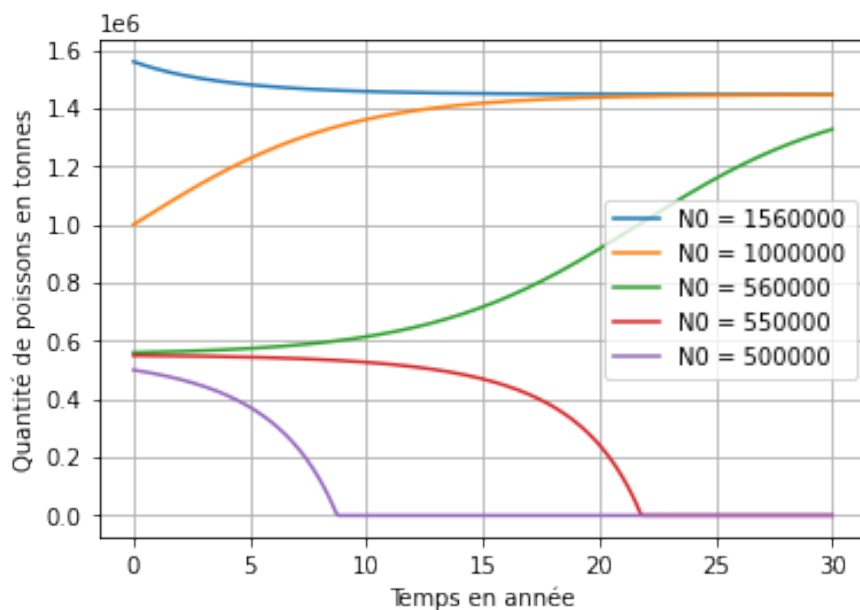
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - P = F(N(t)), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

en supposant que F reste nulle dès qu'elle devient nulle pour la première fois.

- On suppose à nouveau que le taux de croissance maximum vaut $r = 0.5/\text{an}$, que la capacité d'accueil vaut $K = 2.10^6 T$ et on pose $P = 2.10^5 T/\text{An}$ le taux de prélèvement dû à la pêche.

Utiliser le Notebook et complétez la fonction `verhulstAvecPrelevements()` pour donner l'évolution de la population sur trente années en fonction de différentes populations initiales prises dans $\{1e6, 0.5e6, 0.56e6, 1.56e6\}$.

Vous devriez obtenir les évolutions suivantes :



- ② Déterminer les états stationnaires de ce modèle. On pourra les visualiser en traçant simultanément grâce à *Geogebra* l'allure de la fonction f définie par $f(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$ et la fonction constante $y = P$ et utiliser les fonctions `np.poly1d()` et la méthode `r` qui permet d'obtenir les racines d'un polynôme. Interpréter les résultats obtenus.

Définition

états stables et instables

On dit qu'un état stationnaire N_∞ est **stable** lorsque toute solution ayant pour condition initiale un N_0 proche de N_∞ tend vers N_∞ lorsque t tend vers l'infini. Un état stationnaire qui n'est pas stable au sens de cette définition est dit **instable**.

Dire, à l'aide du graphe précédent et représenté ci-dessous, quels sont les états qui sont stables parmi les états stationnaires obtenus précédemment et justifier les comportements observés à la question 1.

3.2.4 Le modèle de Gompertz

Il s'agit d'un autre modèle de dynamique de populations dont le choix est de moduler le coefficient r de façon logarithmique avec l'équation différentielle :

$$N'(t) = r \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right) N(t) \quad (\mathcal{G})$$

Ici encore l'équation n'est pas linéaire. Comme précédemment, K désigne la capacité de charge du milieu et r est un réel strictement positif appelé taux de croissance *per capita*.

Cette équation, si on est guidé, peut se résoudre par séparation des variables :

$$N'(t) = r (\ln(K) - \ln(N(t))) N(t) \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{N'(t)}{N(t)}}_{u'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{\ln \left(\frac{K}{N(t)} \right)}}_{\frac{1}{u(t)}} = r$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$-(\ln(\ln K - \ln N(t)) - \ln(\ln K - \ln N_0)) = rt$$

Et en passant à l'exponentielle :

$$\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = \ln\left(\frac{K}{N_0}\right) e^{-rt}$$

puis

$$N(t) = K \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right) e^{-rt}\right)$$

Utiliser à nouveau le notebook et la fonction `eulerExplicite()` pour approcher cette solution et faire varier les paramètres r et N_0 .

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

4.1 Rappels de cours

Propriété

cas d'une équation homogène

Les solutions générales de l'ED homogène $y'' + ay' + by = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée : $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles r_1 et r_2 et

$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$.

$$y_h(t) = e^{r_0 t} (\lambda_1 t + \lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$y_h(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

soit $y'' + ay' + by = g(x)$

- Une solution évidente existe. C'est le cas si g est une constante, si c'est une fonction polynomiale (auquel cas y_p est également polynomiale) ou bien si l'énoncé nous a fait étudier au préalable une fonction qui répond à la question...
- L'énoncé nous donne la forme de la solution particulière. Elle dépend de paramètres réels et il suffit de la replonger dans l'ED pour les obtenir et répondre à la question (cf Tac O tac « analyse » du site internet).