MATHEMATIQUES
Variables aléatoires discrètes

L'usage de la calculatrice ***n'est pas autorisé*** *au cours de l'épreuve. Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*
Chronologie estimée : exercice : 30mn ; Problème 1 : 45mn ; problème 2 : 1h30.
On conservera un quart d'heure pour une méticuleuse relecture et l'encadrement des résultats....

Exercice

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② Conclure que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On notera par la suite S sa limite.

③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que $S = ln(2)$

④ En distinguant selon la parité de n, montrer que $|S - S_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Problème 1 (« La loi de la jungle »)

Partie A : Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres, pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes rapportent une gazelle est de $2/3$, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de $1/3$. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre, à chaque repas.
On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

On appelle G_k l'événement : « le lion a mangé une gazelle au k-ième repas observé » et Z_k l'événement : « il a mangé un zèbre au k-ième repas observé ».

① Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles (et donc pas de zèbre) ?

② Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, il ait mangé dans cet ordre, un zèbre puis deux gazelles ?

③ Sur les quatre premiers repas observés, on considère l'événement E : « il a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois au troisième et quatrième repas ». Calculer $\mathbb{P}_{G_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{Z_1}(E)$. En déduire $\mathbb{P}(E)$.

Partie B : On observe le lion sur une assez longue période. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de repas nécessaires pour que, pour la première fois, le lion ait mangé deux gazelles à deux repas consécutifs. Par exemple, l'événement E (défini en A/3.) est l'événement $(Y = 4)$.
On note $u_n = \mathbb{P}(Y = n)$ pour tout entier n, $n \geq 2$ et on pose $u_1 = 0$.

① Préciser u_2, u_3 et u_4.

② Justifier que $\mathbb{P}_{G_1}(Y = n+2) = \mathbb{P}(Z_2 \cap (Y = n)) = \frac{1}{3}u_n$.
Pourquoi peut-on dire que $\mathbb{P}_{Z_1}(Y = n+2) = u_{n+1}$?

③ A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$

Vérifier que cette relation est encore vraie pour $n = 1$.

④ En déduire que $u_n = \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n + \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n$ pour tout $n \geq 1$.

⑤ Vérifier que la suite (u_n) définit bien une loi de probabilité, autrement dit :

$$\text{(a) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0\,;\ \text{(b) } \sum u_n \text{ converge}\,;\ \text{(c) } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

⑥ ✎ *Remarque 1 :* On admet dans cette question que, dans le cas d'une variable aléatoire discrète X qui prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (ce qui est le cas ici), $\mathbb{E}(X)$ existe si $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument et, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe et donner sa valeur.

⑦ ✎ *Remarque 2 :* On admet dans cette question que, dans le cas d'une variable aléatoire discrète X qui prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (ce qui est le cas ici), $\mathbb{E}(X^2)$ existe si $\sum k^2\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument et, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X = k)$.
Montrer que $\mathbb{E}(Y^2)$ existe et donner sa valeur.
En déduire, à l'aide de la formule de Koënig-Huygens, l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Y)$.

Problème 2 :

Partie I :

Pour tout p réel dans l'intervalle $]0,1[$, on considère la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_{n+1} = 1 - p + pv_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } v_0 \in]0,1[$$

① Écrire une fonction Python `calculV(p, n)` d'arguments un réel $p \in]0,1[$ et un entier n, qui demande à l'utilisateur de rentrer le premier terme v_0 de la suite et retourne la valeur de v_n.

② Soit $f : x \longmapsto 1 - p + px^2$ telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Montrer que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 1 et $\frac{1-p}{p}$ avec éventuellement $1 = \frac{1-p}{p}$ pour une valeur de p qu'on précisera.

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $v_n \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (on écrira complètement la récurrence).

③ On suppose que $p \leq 1/2$. Montrer que $\frac{1-p}{p} \geq 1$ et donner le graphe de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé bien choisi. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et convergente vers une limite qu'on déterminera.

④ On s'intéresse au cas $p > 1/2$. Tracer le graphe de f après avoir comparé $\dfrac{1-p}{p}$ à 1.
Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) en précisant pourquoi il est nécessaire de distinguer les cas $0 < v_0 < \dfrac{1-p}{p}$ et $\dfrac{1-p}{p} < v_0 < 1$.

Partie II : Application

On considère une population de bactéries pour laquelle une bactérie a une probabilité p de donner 2 cellules filles avant de mourir, et une probabilité $q = 1 - p$ de mourir sans se reproduire.
Toutes les bactéries suivent la même loi et leurs reproductions sont considérées comme indépendantes les unes des autres.

Soit X_n la taille de la population a la n-ième génération. On suppose qu'il n'y a qu'une bactérie au début de l'expérience et donc que X_0 vaut 1 de façon certaine.

① Première génération :

a) Justifier que $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ et déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in X_1(\Omega)$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
✐ On rappelle que, par définition, pour une variable aléatoire X discrète finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)\,;\, \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k) \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

② On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter u_n. Expliciter u_0 et u_1.

③ On souhaite écrire une fonction Python `simulPopulation(p, n)` permettant de simuler l'évolution de cette population au cours de n générations, p et n étant fournis en paramètres d'entrée.
Le corps de cette fonction est le suivant :

```
1    def simulPopulation(p,n):
2        nB = 1
3        P = [0]*(n+1)
4        P[0] = nB
5        for k in range(...):
6            if nB > 0:
7                for i in range(nB):
8                    if ...: # la bactérie se dédouble
9                        nB += ...
10                   else:
11                       nB -= ...
12               P[k]=nB
13       return P
```

a) Commenter les lignes 2 à 4.

b) Justifier la structure conditionnelle en ligne 6. Pourquoi l'absence d'un `else` ?

c) Compléter les lignes 5, 8, 9 et 11 en le justifiant.
✐ On pourra faire appel à la fonction `random()` de la bibliothèque `random` dont on rappelle qu'elle retourne un nombre réel pris au hasard entre 0 et 1 selon une loi uniforme.

④ Justifier, avec une phrase, que : $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)^2$ (✐ peut être admis pour la suite).

⑤ A l'aide du système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$ établir grâce à la formule des probabilités totales que

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2 = f(u_n)$$

⑥ On se place dans le cas $p \leq 1/2$.

a) Justifier pourquoi on peut être certain que la population de bactéries va s'éteindre.

b) En vous inspirant de la fonction `simulPopulation()`, écrire une fonction `tempsJusquAExtinction(p)` qui retourne le nombre de générations nécessaire pour que la population s'éteigne.

c) Écrire une fonction `ListeTpsExtinction(p,m)` qui répète un nombre m de fois (supposé grand) la fonction précédente et retourne une liste `L` formée des temps nécessaires à l'extinction de la population pour chacune de m répétition.

d) En exécutant `L.count(1)/m` on obtient successivement pour $p = 0.4$ et $m = 1000$ les valeurs 0.592 et 0.604. Cela vous semble-t-il cohérent ?

e) Comment feriez-vous, connaissant L, pour estimer la valeur de u_2 ?

f) Écrire, sans recours à la bibliothèque `numpy` une fonction `moyenne(L)` et `ecartType(L)` retournant respectivement la moyenne et l'écart-type d'une liste `L`.
Lequel de ces deux résultats vous semble le plus probable lorsque $p = 0.4$? $moy1 = 2.35$ et $s1 = 2.67$ ou $moy2 = 14.25$ et $s2 = 3.24$? Justifier votre choix.

Partie III : Le cas particulier $p > 1/2$

Nous nous plaçons désormais exclusivement dans le cas $p > 1/2$. Sous cette condition, on peut imaginer que la population peut converger vers un état stable ou bien tendre vers l'infini. Les questions suivantes ont pour objectif d'exclure l'un de ces deux cas.
Nous introduisons pour ça la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, g_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)t^k \text{ (avec } 0^0 = 1 \text{ par convention)}$$

① Écrire une fonction python `tailleMoyenne(n, p, m)` permettant de calculer en fonction de p le nombre moyen d'individu à la génération n lors de la répétition un nombre m de fois (supposé grand) du processus de reproduction à partie d'une bactérie.
Ecrire une fonction permettant de représenter graphiquement l'évolution de cette taille moyenne pour n allant de 1 à 20, p étant fixé. Ci dessous, un graphe représentant l'évolution des tailles moyennes de population quand $p = 0.6$. Construire un graphe équivalent pour $p = 0.55$ et $p = 0.7$. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

② a) Montrer que $g_{X_1} = f$. Que vaut $g'_{X_1}(1)$?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires et peut s'exprimer sous la forme : $X_n(\Omega) = \{2j, j \in [\![0, 2^{n-1}]\!]\}$.

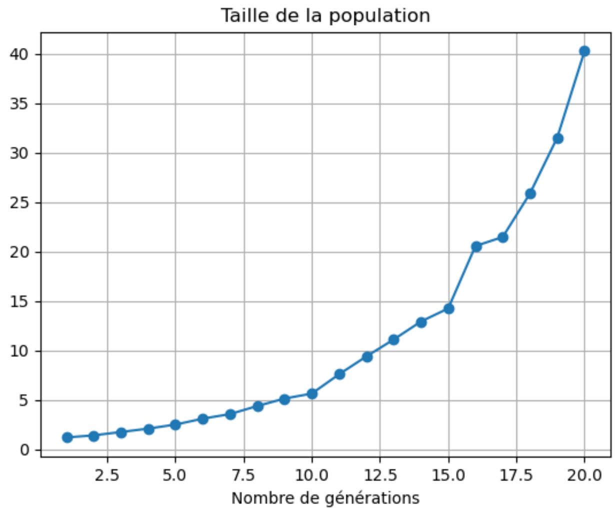
c) Donner la valeur de $g_{X_n}(1)$. Justifier la dérivabilité de g_{X_n} et le fait que $g'_{X_n}(1) = \mathbb{E}(X_n)$.

d) Montrer que $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) = 0$ si j impair ou k impair et que, sinon :

$$\mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k) = \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 2j$$

e) En déduire que $g_{X_{n+1}}(t) = g_{X_n}(g_{X_1}(t))$ (✐ Ce résultat pourra être admis).

f) Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_1)$.



g) Conclure sur l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En quoi avons-nous désormais une idée du comportement de la population bactérienne dans les cas où elle ne s'éteint pas ?

③ On reprend les notations de la question II.2 en notant $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et on rappelle que :

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2, \ \forall n \geq 1$$

a) Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n$ et interpréter ce résultat.

b) On note pour tout n entier naturel, D_n l'événement : « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ».
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(D_n) = u_n - u_{n-1}$.

c) Soit R l'événement : « la population de bactéries finit par s'éteindre ».
Justifier le fait que $R = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$.
Déterminer alors la probabilité que la population de bactérie s'éteigne.