

CORRECTION DS02 : Suites numériques et fonctions

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

①

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

$$T_2 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - \binom{n}{0} 2^0 = (2+1)^n - 1 = \boxed{3^n - 1}$$

② a) On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \boxed{n 2^{n-1}}$$

et de même,

$$T_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \text{ car } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ et } (k-1) \binom{n-1}{k-1} = (n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

En effectuant le changement de variables $i = k - 2$, on obtient cette fois :

$$T_n = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} = \boxed{n(n-1) 2^{n-2}}$$

b) Une deuxième méthode existe qui repose sur la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^n$.

i. On a $f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

Conclusion : $\text{Pour } x = 1, \text{ on a : } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

ii. On a :

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} \text{ et } f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$...

Conclusion : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \text{ et } \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2}$

c) Que vaut $U_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$? On utilise le fait que $k^2 = k(k-1) + k$

$$U_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2} + n 2^{n-1} = n 2^{n-2} [(n-1) + 2]$$

Conclusion : $U_n = n(n+1) 2^{n-2}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- ① f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Si on ajoute que $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^3$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, on peut dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3		$-\infty$		$+\infty$
	$-\infty$			-1			

On note alors que :

- f est continue et strictement croissante sur $] -\infty, -1]$ donc c'est une bijection de $] -\infty, -1]$ sur $f([-\infty, -1]) =]-\infty, 3]$. Or $0 \in]-\infty, 3]$ donc $\boxed{\exists! \alpha \in]-\infty, -1]/f(\alpha) = 0}$
- f est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$ donc c'est une bijection de $[-1, 1]$ sur $f([-1, 1]) = [-1, 3]$. Or $0 \in [-1, 3]$ donc $\boxed{\exists! \beta \in [-1, 1]/f(\beta) = 0}$
- f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc c'est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$. Or $0 \in [-1, +\infty[$ donc $\boxed{\exists! \gamma \in [1, +\infty[/ f(\gamma) = 0}$

- ② Pour montrer que $\alpha \in [-2, -1]$, $\beta \in [-1, 1]$ et $\gamma \in [1, 2]$ il suffit de calculer :

$$f(-2) \cdot f(-1) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$$

et

$$f(-1) \cdot f(1) = 3 \cdot (-1) = -3 < 0$$

et enfin

$$f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$$

On peut alors conclure grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

- ③ Écrire une fonction Python `dichotomie(a, b, p)` qui renvoie une approximation à 10^{-p} près de l'unique solution de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$.

```

1 def dichotomie(a, b:float, p:int) -> float:
2     f = lambda x:x**3-3*x+1
3     while b-a > 10**(-p):
4         c = (a+b)/2
5         if f(a)*f(c) <= 0:
6             b = c
7         else:
8             a = c
9     return round(c, p)

```

- ④ Les lignes de commande qui permettent de renvoyer successivement les valeurs approchées de α , β et γ à 10^{-3} près sont :

`dichotomie(-2, -1, 3)`, `dichotomie(-1, 1, 3)` et `dichotomie(1, 2, 3)`

Problème (d'après Agro-véto B 2024)

On s'intéresse ici à des modèles déterministes discrets d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n .

On supposera $v_0 \neq 0$ et on dit qu'il y a extinction si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

- ① Pour commencer, on propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre moyen de descendants q ($q \in \mathbb{R}_+^*$), de telle sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q . Dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \cdot q^n$$

La population s'éteint si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Conclusion : La population s'éteint si $0 < q < 1$

Lu dans le rapport de jury : « Question bien traitée. Attention au cas $q = 1$ »

- ② On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right)$$

où $S \in]0, +\infty[$ est une constante du problème.

- a) En posant $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}x \left(\frac{S - x}{S} \right)$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$.

Faisons l'étude de f et dressons son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$:

On peut commencer par exprimer $f(x)$ sous une forme plus « agréable » en écrivant :

$$f(x) = \frac{2Sx + Sx - x^2}{2S} = \frac{3Sx - x^2}{2S} = -\frac{x}{2S}(x - 3S)$$

- Rédaction 1 : On reconnaît un trinôme du second degré dont la courbe est une parabole... son comportement asymptotique sera donc *parabolique* ;) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = 3S$$

et le coefficient dominant étant négatif, il est immédiat que f est croissante sur $\left[0, \frac{3S}{2}\right]$ et

décroissante sur $\left[\frac{3S}{2}, +\infty\right[$.

- Rédaction 2 : On étudie classiquement le signe de la dérivée

$$f'(x) = \frac{3S - 2x}{2S} = \frac{3}{2} - \frac{x}{S} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{S} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}S$$

Pour la branche parabolique de direction $[0, y)$, il suffit de dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2S}(x - 3S) = -\infty \dots$$

Quelle que soit la rédaction, on obtient pour tableau de variation :

x	0	$\frac{3}{2}S$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{9S}{8}$	$-\infty$

Lu dans le rapport de jury : « Question assez bien traitée. Il y a trop d'erreurs de calcul sur la dérivée. Il faut penser à mettre les limites dans le tableau de variation. Très peu de candidats utilisent leur cours pour donner le sens de variations d'une fonction polynomiale de degré 2 sans passer par la dérivée ».

- b) L'essentiel du code est donné et il faut surtout justifier comment calculer puis tracer les 20 premiers termes, autrement dit les termes v_0 à v_{19} . Cette simple remarque explique le choix du `range(1, 20)`...

```

1      S = 30
2      v0 = 5
3      L = [v0]
4      v = v0
5      for k in range(1, 20):
6          v = v + 0.5*v*(S-v)/S
7          L.append(v)
8      I = [k for k in range(20)] # I = [0, ..., 19]
9      plt.plot(I, L, 'ro')
10     plt.xlabel("n")
11     plt.ylabel("v_n")
12     plt.show()
```

Lu dans le rapport de jury : « Question bien traitée même si le `range` est souvent faux »

- c) Pour le tracé, on a utilisé le module `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`. Pour l'importer on écrira : `import matplotlib.pyplot as plt`.

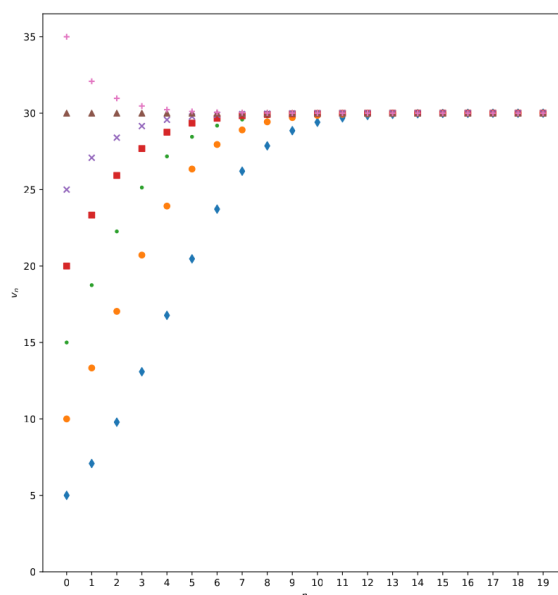
Lu dans le rapport de jury : « Question bien traitée ».

- d) On trace sur la même figure l'évolution de v_n pour différentes valeurs de v_0 . Cela donne les courbes proposées en haut de la page suivante (pour $S = 30$).

A la lecture du graphique on conjecture que La suite semble converger vers S .

Lu dans le rapport de jury : « Question bien traitée ».

- e) On suppose maintenant que $v_0 \in]0, S[$.
- Montrons que pour tout n entier naturel, $v_n \in]0, S[$: On reconnaît une question classique... il s'agit dans un premier temps de montrer que l'intervalle $I =]0, S[$ est stable par f . Il suffit pour ça de regarder le tableau de variation en notant que $S < \frac{3}{2}S$.
Donc f est strictement croissante et continue sur $[0, S]$.
C'est une bijection de $[0, S]$ sur $[0, S]$ puisque $f(0) = 0$ et $f(S) = S$



Donc, $\forall x \in]0, S[$, on a $f(x) \in]0, S[$.

Une récurrence permet alors de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0, S[$. En effet :

- $v_0 \in]0, S[$ (et si $v_0 = S$, alors la suite est constante égale à S mais ce cas est considéré comme improbable d'un point de vue « dynamique de populations » et n'est pas abordé).
- On suppose $v_n \in]0, S[$ pour n fixé ($n \geq 0$).
- Alors $v_{n+1} = f(v_n) \in]0, S[$ puisque $]0, S[$ est stable par f .

Conclusion : si $v_0 \in]0, S[$ alors $v_n \in]0, S[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lu dans le rapport de jury : « Question mal traitée, alors qu'elle laissait beaucoup de liberté aux étudiants. Parmi les erreurs notables :

- La question 2.a) est trop peu utilisée, il est souvent affirmé gratuitement que si $v_0 \in]0, S[$ alors v_n aussi pour toute valeur de n .
- Il est souvent affirmé dans la question suivante : « La suite est croissante et majorée par S donc elle converge vers S », alors que cela prouve seulement la convergence. Quand le passage à la limite est réalisé, le cas $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ est rarement exclu convenablement.

»

ii. Démontrons que (v_n) est croissante :

On peut se contenter d'étudier le signe de $f(x) - x = \frac{1}{2}x \left(\frac{S-x}{S} \right)$ qui est un trinôme du second degré admettant 0 et S comme racines.

Dès lors, le coefficient dominant étant négatif, on a : $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in [0, S]$.

Or, justement, $v_n \in]0, S[$ et donc $f(v_n) - v_n = v_{n+1} - v_n \geq 0$

Conclusion : La suite (v_n) est croissante.

iii. En déduire qu'elle converge et donner sa limite : La suite (v_n) est croissante et majorée par S donc elle converge vers $L \in [0, S]$.

Par ailleurs, la fonction f étant continue sur $[0, S]$, on a $f(L) = L \Leftrightarrow f(L) - L = 0 \Leftrightarrow L = 0$ ou $L = S$.

Or $v_0 > 0$ et (v_n) est croissante...

Conclusion : La suite (v_n) converge vers $L = S$

③ On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f . Désormais, avec $A \in]0, S[$ un réel fixé :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right) \left(\frac{v_n - A}{S} \right)$$

a) Identifier f est rapide. Il suffit de poser $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}x \left(\frac{S - x}{S} \right) \left(\frac{x - A}{S} \right)$

Étudions maintenant le signe de $f(x) - x$ sur $[0, S]$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \left(\frac{S - x}{S} \right) \left(\frac{x - A}{S} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (S - x)(x - A) \geq 0 \Leftrightarrow (x - S)(x - A) \leq 0 \end{aligned}$$

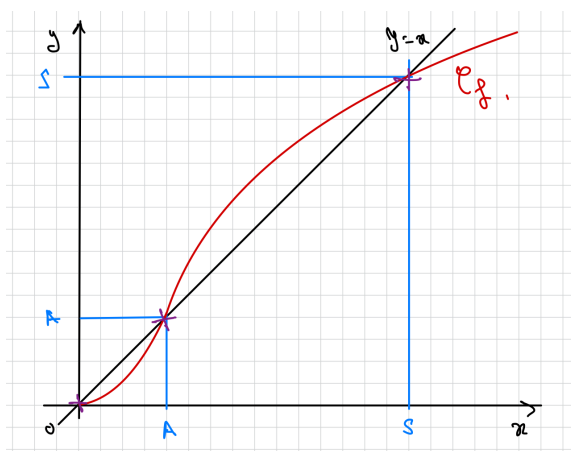
D'où $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq S \\ x \leq A \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leq S \\ x \geq A \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in [A, S]}$ puisque par hypothèse $A < S$ et donc $x \leq A$ et $x \geq S$ est impossible !

Conclusion : $\boxed{f(x) - x \geq 0 \text{ si } x \in [A, S] \text{ et } f(x) - x \leq 0 \text{ si } x \in [0, A]}$

Pour en déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, S]$, on commence par noter que f est une bijection strictement croissante de $[0, S]$ sur lui-même (admis d'après l'énoncé) et que :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = A \text{ ou } x = S$$

Ce qui donne la représentation suivante :



Lu dans le rapport de jury : « La fonction f est trouvée mais les candidats développent souvent (ou dérivent) l'expression déjà factorisée de $f(x) - x$. Quand le signe est bien étudié, la représentation graphique est souvent juste. »

b) Dans cette question $v_0 \in]0, A[$.

On fait ici comme en 2.e) : l'intervalle $[0, A]$ est visiblement stable par f d'après le graphe précédent et $v_0 \in]0, A[$ donc par la même récurrence, on obtient $\boxed{n \in \mathbb{N}, v_n \in]0, A[}$

Par ailleurs, sur $]0, A[$, $f(x) \leq x$ donc $f(v_n) \leq v_n \Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_n$.

Conclusion : $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$

La suite est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un point fixe de f car f est continue sur $[0, A]$

Conclusion : $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0}$

Lu dans le rapport de jury : « Mêmes remarques que pour 2.e), les candidats voient trop rarement l'intérêt de la question précédente. »

- c) Lorsque $v_0 \in]A, S[$, on montre que $v_n \in]A, S[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le même raisonnement puisque cette fois on considère l'intervalle $]A, S[$ également stable par f .

Par ailleurs, pour tout $x \in]A, S[$, on a : $f(x) - x \geq 0$ donc $f(v_n) - v_n \geq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Conclusion : La suite (v_n) est croissante.

La suite est croissante et majorée par S donc elle converge vers un point fixe de f sur $[A, S]$. Seul S est possible puisque $v_0 > A$.

Conclusion : (v_n) converge vers S

Enfin si $v_0 = A$ alors il est immédiat de montrer que la suite (v_n) est constante égale à A .

- d) *Donnons une interprétation (en terme de dynamique des populations) des quantités A et S :* On reconnaît à la question 2. le modèle logistique défini par $\frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = r \left(1 - \frac{v_n}{K}\right)$ avec ici $r = 1/2$ et $K = S$.

On rappelle que dans un modèle logistique de compétition à l'intérieur d'une espèce. $K = S$ est le seuil à partir duquel le taux de croissance devient négatif, aussi appelé « capacité d'accueil » de l'environnement. C'est aussi la valeur de stabilisation de la population.

Le défaut majeur de ce modèle est lié aux faibles effectifs car, même si l'effectif de la population est très faible au regard de K (par exemple seulement quelques individus au sein d'un environnement vaste) alors la population va croître vers K alors même que cet effectif ne suffit pas à assurer la survie de l'espèce. Dans la question 3. le rôle de A est de modéliser un « seuil d'extinction » de la population, car d'après notre étude, si l'effectif de la population est en dessous de cette valeur, alors elle s'éteint et si elle est au dessus de cette valeur (et inférieur à S) alors elle croît vers S .

Lu dans le rapport de jury : « La constante S est souvent bien interprétée, c'est un peu moins le cas pour A . On attendait non seulement la notion de seuil : la suite a un comportement différent selon la position de u_0 par rapport à A , mais aussi une interprétation en terme de dynamique, par exemple : la densité initiale de population dans l'espace est insuffisante pour que les individus se rencontrent »